Série A, N° 3881
N° d'ordre : 4732

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Pierre HÉMARD

1re Thèse — ***Sur les phénomènes élastiques dans les voiles de roues frettées.***

2e Thèse — ***Propositions données par la Faculté.***

Soutenues le 0 NOV. 1962 devant la commission d'examen

M. M. FOCH : Président

VILLE, SIESTRUNCK } Examinateurs

Série A, N° 3881
N° d'ordre : 4732

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Pierre HÉMARD

1re Thèse — ***Sur les phénomènes élastiques dans les voiles de roues frettées.***

2e Thèse — ***Propositions données par la Faculté.***

Soutenues le devant la commission d'examen

M. M. FOCH : Président

VILLE, SIESTRUNCK } Examinateurs

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

(Janvier 1962)

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen ..... M. ZAMANSKY .

G. JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure
DE BROGLIE	T	Théories physiques
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées
GRASSE	T	Evolution des êtres organisés
PREVOST	T	Chimie organique
CHAUDRON	T	Chimie appliquée
WYART	T	Minéralogie et Cristal.
TEISSIER	T	Zoologie
MANGENOT	T	Biologie végétale (Orsay)
AUGER	T	Physique quantique et relativité
MONNIER	T	Physiologie générale
PIVETEAU	T	Paléontologie
ROCARD	T	Physique (E.N.S.)
CARTAN	T	Mathématiques (E.N.S.)
LAFFITTE	T	Chimie générale
FAVARD	T	Géométrie supérieure
COULOMB	T	Physique du Globe
Mlle COUSIN	T	Biologie animale (S.P.C.N.)
CHRETIEN	T	Chimie minérale
DRACH	T	Zoologie
KASTLER	T	Physique (E.N.S.)
EPHRUSSI	T	Génétique
RIVIERE	T	Géologie S.P.C.N. et Sédim.
GAUTHERET	T	Biologie végétale (P.C.B.)
LUCAS R.	T	Recherches physiques
THOMAS A.	T	Biologie cellulaire
ARNULF	T	Optique appliquée
MORAND	T	Physique Enseignement
SOLEILLET	T	Physique (P.C.B)
FORTIER	T	Mécanique exp. des fluides
DANJON	T	Astronomie
PETIT	T	Biologie maritime
QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique
GALLIEN	T	Embryologie
EICHHORN	T	Botanique
DE CUGNAC	T	Biologie végétale (S.P.C.N.)
Mlle CAUCHOIS	T	Chimie Physique
THELLIER	T	Physique du Globe
L'HERITIER	T	Biologie générale (Orsay)
GRIVET	T	Radioélectricité (Orsay)
PONCIN	T	Mécanique générale
DUBREIL	T	Arithmétique et théorie des nombres
QUELET	T	Chimie organique
CAGNIARD	T	Géophysique appliquée
CHAMPETIER	T	Chimie macromoléculaire
CUVILLIER	T	Micropaléontologie
JUNG	T	Pétrographie
TRILLAT	T	Microscopie et diffraction électronique
WIEMANN	T	Chimie organique et struc.
JACQUINOT	T	Spectroscopie et physique céleste (Orsay)
VASSY	T	Physique de l'atmosphère
DESTOUCHES	T	Théories physiques
AMIEL	T	Chimie générale
HOCART	T	Minéralogie et Cristallog.
J. P. MATHIEU	T	Physique (Optique)
COUTEAUX	T	Biologie animale (P.C.B.)
MAY	T	Zoologie (Orsay)
CHOQUET	T	Théorie des fonctions et Topologie
FELDMANN	T	Biologie végétale marine
GUINIER	T	Physique des solides (Orsay)
JOST	T	Physiologie comparée
FORTET	T	Calcul des probabilités et physique mathématique
SCHWARTZ	T	Calcul diff. et intégral
CHOUARD	T	Physiologie végétale
MALAVARD	T	Aviation (Techn. Aéronautique)
BRELOT	T	Calcul diff. et intégral
NORMANT	T	Synthèse organique générale
BENARD	T	Chimie minérale
BUVAT	T	Botanique (E.N.S.)
DUGUE	T	Statistiques mathématiques
SOULAIRAC	T	Psychophysiologie
ULRICH	T	Physiologie végétale
MARECHAL	T	Optique théorique et appliquée
KIRRMANN	T	Théories chimiques
CHADEFAUD	T	Botanique
Mlle LE BRETON	T	Physiologie de la nutrition
SALEM	T	Mathématiques générales
LELONG	T	Application de l'analyse à la géométrie
DEVILLERS	T	Anatomie et Histologie comp.
EHRESMANN	T	Topologie algébrique
FRANÇON	T	Physique (S.P.C.N.)
GLANGEAUD	T	Géographie physique et Géologie dynamique
GODEMENT	T	Mathématiques (M.P.C.)
PISOT	T	Technique mathématique de la physique
ROCH	T	Géologie
SCHATZMAN	T	Astrophysique
TERMIER	T	Paléontologie stratig.
ZAMANSKY	T	Mathématiques générales
LENNUIER	T	Physique (M.G.P.)
RIZET	T	Génétique (Orsay)

ROUTHIER	T	Géologie appliquée
Mme TONNELAT	T	Physique théorique
DIXMIER	T	Mathématiques (M.P.C.)
SOUCHAY	T	Chimie générale
AIGRAIN	T	Electrotechnique générale
BRUSSET	T	Chimie systématique
M. LEVY	T	Physique théorique des hautes énergies (Orsay)
Mme CHAIX	T	Chimie biologique
Mme HUREL-PY	T	Biologie végétale (P.C.B.)
PIAUX	T	Chimie (M.P.C.)
BRUN	T	Mécanique théorique des fluides
LEDERER	T	Chimie biologique
Mme DUBREIL	T	Mathématiques (Agrégation)
Mme LELONG	T	Mathématiques (E.N.S.)
BELLAIR	T	Géologie (S.P.C.N.)
COTTE	T	Physique électricité
DUBOIS J.E.	T	Chimie organique
LAMOTTE	T	Zoologie (E.N.S.)
MICHEL A.	T	Chimie minérale (Orsay)
OLMER	T	Energétique générale
ROUAULT	T	Electricité (Orsay)
GAUTHIER	T	Mécanique appliquée
BARCHEWITZ	T	Chimie Physique
BROSSEL	T	Physique atomique
BUSER		Physiologie comparée
CAMUS		Physiologie vég. (B.M.P.V.)
CASTAING	T	Physique (Orsay)
CURIEN	T	Minéralogie et Cristallog.
MOYSE	T	Physiologie vég. (Orsay)
NOIROT		Evolution des êtres org.
PANNETIER	T	Chimie générale (Orsay)
POSSOMPES	T	Zoologie
PULLMANN	T	Chimie théorique
TEILLAC	T	Physique nucléaire et Radio-activité
TONNELAT	T	Biologie physico chimique
VILLE	T	Econométrie
WILLEMART		Chimie (P.C.B.)
DODE	T	Chimie (Orsay)
FREYMANN	T	Recherches physiques
GUINOCHET	T	Biologie vég. (S.P.C.N.) (Orsay)
ROLLET	T	Chimie (P.C.B.)
Mlle JOSIEN	T	Chimie (S.P.C.N.)
CHEVALLEY	T	Géométrie algébrique et Théorie des groupes
ARNOULT	T	Electronique (Orsay)
CHAPELLE	T	Physique (Orsay)
DELANGE	T	Mathématiques (Orsay)
DENY	T	Mathématiques générales (Orsay)
GERMAIN	T	Mécanique théorique des fluides
LUCAS G.	T	Géologie
ALLARD	T	Chimie Physique
BERTHELOT	T	Physique fondamentale des hautes énergies (Orsay)
BRICART	T	Météorologie et physique de l'atmosphère
Mme ALBE-FESSARD		Psychophysiologie
FRIEDEL		Physique des solides (Orsay)
M. JULIA		Etude des moléculaires naturelles complexes
LENDER	T	Biologie animale (S.P.C.N.) (Orsay)
MAGAT		Physico-chimie des radio-éléments
Mlle QUINTIN	T	Electrochimie
MONOD	T	Chimie du Métabolisme
BENOIT	T	Physiologie animale (Orsay)
DE POSSEL	T	Analyse numérique
CHARLOT	T	Chimie analytique
HAISSINSKY	T	Radiochimie
LEMEE	T	Physiologie vég. (B.M.P.V.) (Orsay)
GUERIN	T	Chimie (M.P.C.) (Orsay)
CHATELET M.		Chimie (P.C.B.)
JEAN	T	Physique nucléaire (Orsay)
MATTLER	T	Physique (S.P.C.N.)
MICHEL L.		Physique théorique des hautes énergies (Orsay)
BERGERARD		Zoologie (Orsay)
BERTEIN		Electronique (Orsay)
BOUISSIERES		Chimie des radio-éléments (Orsay)
Mme COUTURE		Thermodynamique et Mécanique Physique
ELLENBERGER		Géologie appli. s/le terr.
FRANC		Biologie animale (P.C.B.)
SCHNELL		Botanique tropicale (Orsay)
STOLKOWSKI		Physiologie générale
ACHER		Chimie biologique (Orsay)
BAUDOIN		Biologie animale (P.C.B.)
BEAUMONT		Biologie animale (S.P.C.N.)
BLAMONT		Géophysique Ionosphère
BOURREAU		Botanique
CURIE D.		Physique (M.G.P.)
DURAND-DELGA		Géologie
FREON	T	Chimie organique (Orsay)
HELLER		Physiologie végétale
TORTRAT		Calcul des probabilités
CAILLEUX		Géologie (S.P.C.N.)
MAGNAN	T	Physique (S.P.C.N.)
DAUDEL	T	Mécanique ondulatoire appliquée à la chimie théorique et à la physique nucléaire
Mlle FOURCROY		Biologie végétale (S.P.C.N.)
Me CHOQUET-BRUHAT	T	Mécanique analytique et mécanique céleste
Mlle VEIL		Physiologie générale
LWOFF	T	Microbiologie
SIESTRUNCK	T	Mécanique physique et expérimentale
LACOMBE	T	Métallurgie des métaux nucléaires
BROCHARD	T	Physique (P.C.B.) (Orsay)
CABANNES	T	Mécanique générale
LESIEUR	T	Mathématiques (M.P.C.) (Orsay)
MAZET	T	Mécanique générale (Orsay)
CAIRE		Géographie physique et Géologie dynamique
COMOLET		Mécanique des fluides
CORABŒUF		Physiologie animale
DELLOUE		Physique de l'exosphère
GORENFLOT		Botanique II (Orsay)
HOUILLON		Biologie animale (P.C.B.)
JULLIEN J.		Chimie (P.C.B.)
MALGRANGE		Technique mathématique de la physique
OLIVIER		Antropologie
NOZERAN	T	Botanique II (Orsay)
BLANC-LAPIERRE		Physique (E.N.S.) (Orsay)

SECRÉTAIRE GÉNÉRAL ..... R. POULLAIN

PREMIÈRE THÈSE

Sur les phénomènes élastiques dans les voiles de roues frettées

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41538121_0028

Nous prions Messieurs les Professeurs FOCH, VILLE et SIESTRUNCK de bien vouloir accepter l'expression de notre gratitude pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Nous tenons à exprimer notre reconnaissance à Monsieur Albert KAMMERER, Professeur à l'Ecole Centrale des Arts et Manufactures, Ingénieur à la S.N.C.F., pour l'aide précieuse et les nombreux conseils qu'il nous a si aimablement prodigués.

NOTATIONS

E	module d'élasticité longitudinale (nous prendrons $E = 21\,500$)
μ	module de glissement (nous prendrons $\mu = 8\,400$)
ν	nombre de Poisson (nous prendrons $\nu = 0{,}28$)
h	épaisseur d'une plaque ou d'un voile
K	rigidité de flexion d'une plaque: $K = \dfrac{E\,h^3}{12\,(1-\nu^2)}$
σ_r σ_t τ_{rt}	composantes du tenseur des contraintes en coordonnées polaires
M_r M_t	moment de flexion par unité de longueur en coordonnées polaires M_r le long des sections circulaires concentriques, M_t le long des sections diamètrales
M_{rt}	moment de torsion par unité de longueur en coordonnées polaires le long des sections circulaires concentriques
α	angle au sommet des voiles coniques
y	distance du point étudié au sommet du cône
Q_y	effort tranchant par unité de longueur des cercles parallèles pour les voiles coniques
N_y N_θ	forces normales par unité de longueur des sections de voiles perpendiculaires aux génératrices du cône et aux méridiennes
M_y M_θ	moments de flexion par unité de longueur d'une section méridienne et d'une section perpendiculaire aux méridiennes.

INTRODUCTION

INTRODUCTION

Les roues des véhicules ferroviaires, matériel moteur ou remorqué, sont soumises constamment à des efforts très importants, et leur rupture peut être à l'origine d'accidents très graves. Aussi la connaissance des contraintes auxquelles elles sont soumises apparaît-elle comme particulièrement intéressante.

Ces contraintes peuvent être déterminées en laboratoire statiquement par des extensomètres à fils résistants ou par photoélasticimétrie.

L'extensométrie ne donne des résultats qu'en un nombre limité de points. Aussi elle ne procure pas une représentation complète du gradient des contraintes et par conséquent peut laisser méconnues les zones les plus intéressantes. De plus, les extensomètres ne donnent pas en fait une valeur ponctuelle, mais la valeur moyenne des contraintes supportées par le métal sous-jacent à l'extensomètre.

Les méthodes de photoélasticimétrie tridimensionnelle sont encore en cours de mise au point et exigent en outre la confection de modèles réduits difficiles à réaliser.

Ces deux méthodes ne permettent pas facilement l'étude de l'influence souvent primordiale d'une modification de forme géométrique d'un élément de roue, d'un positionnement de bandage... à moins de confectionner autant de roues qu'il est nécessaire pour l'étude de ces différents paramètres.

....

Il est, par conséquent, apparu nécessaire d'étudier une méthode de calcul des contraintes dans les roues qui fournira des renseignements d'un caractère plus général et sur lesquels on pourrait s'appuyer pour fixer la forme et les dimensions des roues.

Les roues à rayons ne sont pratiquement plus utilisées pour le matériel ferroviaire, aussi étudierons-nous seulement les roues à voile plein.

Celles-ci sont de deux types: les roues monoblocs et les roues bandagées.

a/- Roues monoblocs (figure n° 1) -

Elles peuvent être décomposées en trois parties:

- Le moyeu, fixé par calage (1) sur l'essieu-axe, est un solide de révolution, dont la section droite a des dimensions importantes.
- Le voile d'épaisseur réduite admet des méridiennes de formes variées. Il peut être plan, semi conique, conique ou même de profil absolument quelconque (figures n° 3, 4, 5 et 6).
- Enfin, la jante de dimensions plus importantes comporte sur sa périphéri la table de roulement.

b/- Roues bandagées (figure n° 2) -

Composées des mêmes éléments que les roues monoblocs, elles comportent en plus un bandage qui a été fixé sur la jante par frettage (2).

La jante dans ce cas est de dimensions beaucoup plus réduites que celles de roues monoblocs.

*
* * *

(1)- Nous appelons calage l'assemblage à froid par l'utilisation d'une presse d'une roue sur un axe dont le diamètre est supérieur à l'alésage du moyeu.

(2)- Le frettage est la pose sur la roue du bandage dilaté par chauffage. A même température le diamètre extérieur de la roue est supérieur à l'alésage du banda L'effet mécanique du calage est identique à celui du frettage.

Fig. 1 - Roue monobloc

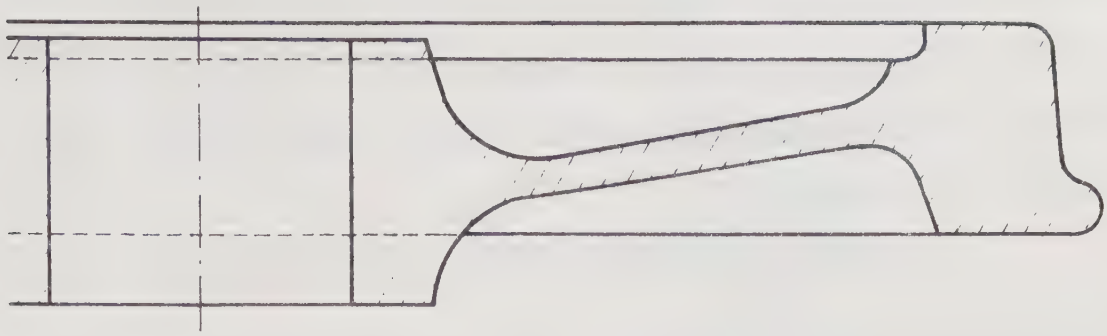
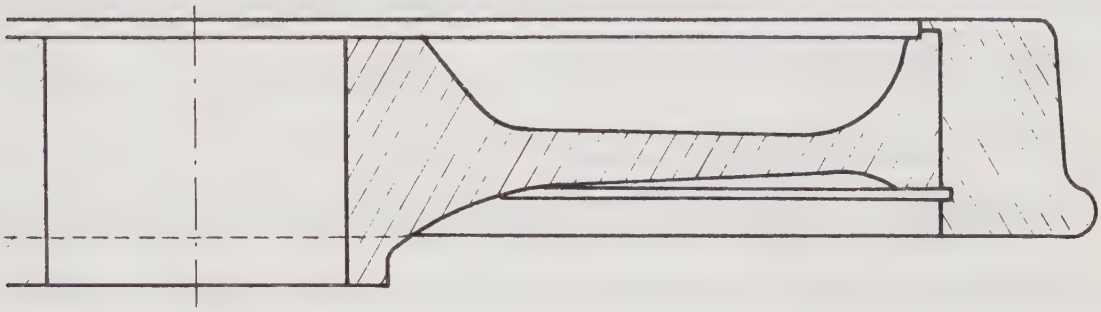


Fig. 2 - Roue bandagée



Forme de voile

Fig. 3 - Voile plan

Fig. 5 - Voile conique

Fig. 4 - Voile semi-conique

Fig. 6 - Voile de forme quelconque

Les contraintes supportées par la roue sont produites:

1°- par le calage de la roue sur l'axe (contraintes fixes)

2°- éventuellement, par le frettage du bandage sur la roue (contraintes fixes) (1)

3°- par l'effet de forces localisées appliquées sur la table de roulement ou sur le boudin.

Ces forces provoquent des contraintes périodiques qui, s'ajoutant aux contraintes fixes dues au calage et au frettage, peuvent être à l'origine de fissurations progressives dites de fatigue.

Elles sont de deux espèces:

- une force radiale produite par la réaction du rail sur la roue. Elle est la conséquence du poids du véhicule et est appliquée sur la table de roulement;

- des forces parallèles à l'axe de la roue. Elles sont dues à la marche louvoyante du véhicule et sont produites par l'action du rail ou du contre-rail sur le boudin qui limite le mouvement latéral.

*
* * *

Du fait de leur forme et de leur position, le bandage et le voile, sont les parties de la roue les plus sollicitées.

Le frettage soumet le bandage à des contraintes de traction très importantes qui se manifestent dans toute sa masse. A celles-ci, s'ajoutent les sollicitations dues aux forces qui, elles, sont localisées sur la table de roulement, ou en son voisinage et qui provoquent souvent des détériorations, quelquefois importantes.

.../...

(1)- Les opérations de calage et de frettage peuvent être faites indifféremment l'une l'une avant l'autre. Toutefois dans la pratique courante la roue est d'abord calée.

Le voile supporte l'effet du calage, du frettage et des forces localisées. Ces dernières, en particulier, se manifestent dans cette partie de la roue avec beaucoup plus d'ampleur qu'en d'autres points, du fait, d'une part, de la faible épaisseur relative du voile, d'autre part, de l'éloignement du point d'application des forces qui produisent ainsi des contraintes de flexion périodiques importantes.

L'objet de la présente étude se limite à la détermination des contraintes supportées par les voiles de roue.

On admettra, bien entendu, que l'ensemble des efforts supportés par la roue ne donne que des déformations élastiques; par conséquent, les contraintes et les déformamations en chaque point de la roue, sont la somme de celles produites par le calage, le frettage et les forces localisées (principe de superposition et de linéarité).

*
* * *

Le calage et le frettage qui produisent des déformations et des contraintes fixes, évidemment symétriques par rapport à l'axe de la roue, font l'objet de la première partie de cette étude.

La seconde partie, consacrée à l'action des forces localisées, après un exposé d'ensemble de la méthode utilisée, est scindée en trois chapitres:

Chapitre I - Déformations de l'ensemble bandage-jante

Chapitre II - Déformations et contraintes dans le voile

Chapitre III - Résolution du système d'équations obtenues.

L'étude théorique que nous avons faite est appliquée à une roue présentant un voile semi-conique pour le calage, le frettage et les forces localisées et à une roue à voile conique pour le frettage. C'est l'objet de la troisième et dernière partie.

La plupart des résultats obtenus seront comparés à ceux donnés par des extensomètres à fils résistants au cours d'études faites par le Laboratoire de la Direction du Matériel et de la Traction de la S.N.C.F. antérieurement à cette étude théorique.

PREMIERE PARTIE

FRETTAGE - CALAGE

PREMIERE PARTIE

FRETTAGE - CALAGE

Le frettage et le calage ont pour effet de soumettre les éléments constitutifs de la roue (moyeu, voile, jante et bandage) à des forces radiales et à des moments qui sont de révolution par rapport à l'axe de la roue.

Les forces introduites par le calage provoquent une contraction de l'essieu, une augmentation des rayons intérieur et extérieur du moyeu, du voile, de la jante et, éventuellement si la roue est déjà bandagée, du bandage.

Les forces dues au frettage occasionnent une contraction de l'essieu, un raccourcissement radial du moyeu, du voile, de la jante et une augmentation du rayon intérieur du bandage.

Les moments déforment par flexion le voile dont l'épaisseur est relativement faible, par rapport à ses autres dimensions.

Il n'en est pas de même pour les autres éléments de la roue dont l'épaisseur est du même ordre de grandeur, voire plus importante que les autres dimensions. Aussi nous admettons que la flexion de ces éléments est négligeable et que les moments ont pour effet de faire pivoter sans déformation angulaire l'ensemble du moyeu, l'ensemble de la jante et l'ensemble du bandage.

Les contraintes supportées par tous les éléments de la roue sont en chaque point la somme des contraintes dues aux forces et des contraintes dues aux moments.

...

Le calcul sera effectué en décomposant la roue en éléments dont la théorie de l'élasticité nous donne en fonction des sollicitations les déformations et les contraintes.

Aussi, nous utiliserons comme éléments unitaires pour le moyeu, la jante et le bandage, des anneaux à section méridienne rectangulaire admettant comme axe l'axe de la roue (fig. 7).

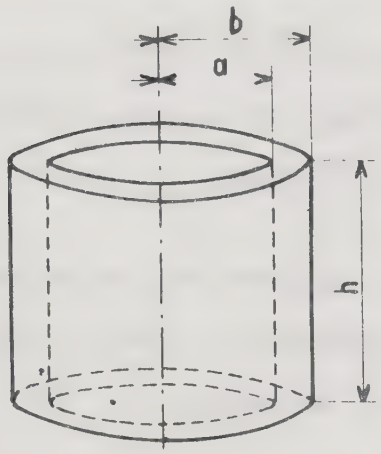


Fig. 7

Chacune des surfaces cylindriques limitant ces éléments unitaires est soumise à une force et à un couple que nous définissons par unité de longueur de circonférence. Cette force et ce couple sont dus à l'action de l'élément contigu.

La détermination des inconnues que nous introduisons sera faite en exprimant que le déplacement radial et le pivotement des surfaces en contact de deux éléments voisins sont les mêmes.

*
* * *

Les éléments seront repérés de 1 à N en partant de l'axe de la roue.

L'élément courant n aura pour rayon de la surface intérieure: a_n

pour rayon de la surface extérieure: b_n

pour hauteur (ou épaisseur) : h_n

...

Il sera soumis sur sa face intérieure à la force $- F_n$ et au couple $- C_n$, sur sa face extérieure à F_{n+1} et à C_{n+1}.

Le déplacement radial de la face intérieure sera u_n, celui de la face extérieure v_n, les pivotements φ_n et ψ_n.

De plus, pour éviter toute confusion, les expressions ayant trait à l'essieu axe seront affectées de l'exposant g, ceux du moyeu de l'exposant i, ceux du voile de l'exposant j, ceux de la jante de l'exposant k et ceux du bandage de l'exposant 1 (1).

*
* * *

1°- Déformation de l'essieu -

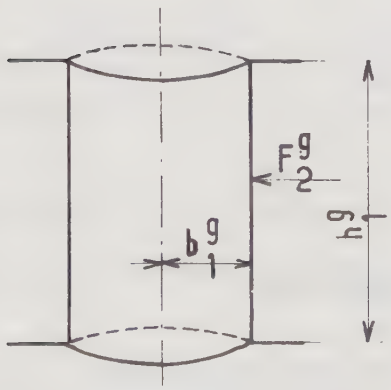


Fig. 8

Nous admettrons que la seule déformation subie par l'essieu est une déformation radiale produite par la force radiale F_2^g appliquée sur toute la hauteur h^g de l'alésage du moyeu (fig. 8).

Le raccourcissement du rayon de l'essieu a pour expression (2):

$$v_1^g = - \frac{1 - \nu}{E\, h_1^g}\, b_1^g\, F_2^g \qquad (1)$$

...

(1)- Quand une valeur sera élevée à une puissance 2, 3 .... nous utiliserons les parenthèses $(x)^2$ $(x)^3$ ....

(2)- Timoshenko - Résistance des Matériaux 2ème Partie - page 217.

2°- Déformation du moyeu -

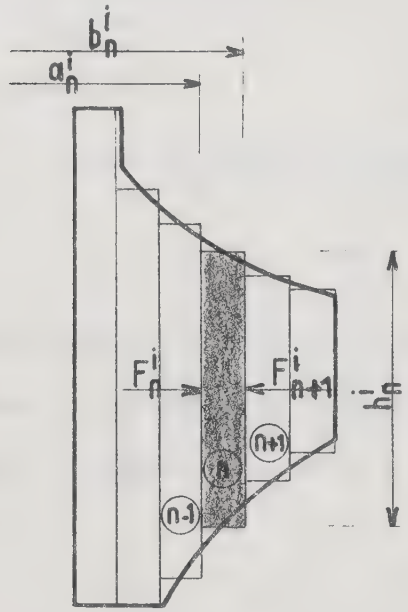


Fig. 9

Nous décomposerons le moyeu en plusieurs éléments unitaires juxtaposés, épousant au plus près son profil (fig. 9).

Effet des forces -

L'élément n est soumis, d'une part, à la force $-F_n^i$ (dirigée vers l'extérieur) réaction de l'élément n - 1, appliquée sur la face interne, d'autre part à la force F_{n+1}^i (dirigée vers l'intérieur) réaction de l'élément n + 1 que nous supposerons appliquée sur la totalité de la face externe.

Le déplacement radial de la face interne de l'élément n est: (1)

$$u_n^i = \frac{a_n^i}{E\,h_n^i} \times \frac{1}{(b_n^i)^2 - (a_n^i)^2} \left\{ \left[(1-\nu)\,(a_n^i)^2 + (1+\nu)\,(b_n^i)^2 \right] F_n^i - 2\,(b_n^i)^2\, F_{n+1}^i \right. \tag{2}$$

Celui de la face externe a pour expression:

$$v_n^i = \frac{b_n^i}{E\,h_n^i} \times \frac{1}{(b_n^i)^2 - (a_n^i)^2} \left\{ 2\,(a_n^i)^2\, F_n^i - \left[(1-\nu)\,(b_n^i)^2 + (1+\nu)\,(a_n^i)^2 \right] F_{n+1}^i \right\} \tag{3}$$

(1)- Timoshenko - Résistance des Matériaux - 2ème Partie - page 217.

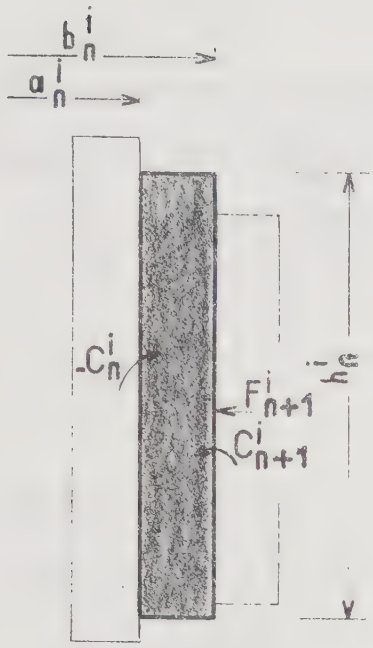


Fig. 10

Effet des moments -

L'élément n est soumis (fig. 10)

- au moment $-C^i_n$ (réaction de l'élément n - 1) appliqué à la surface interne. Ce moment vaut $-\frac{2\,a^i_n}{a^i_n + b^i_n}\,C^i_n$ par unité de longueur de ligne moyenne

- au moment $+C^i_{n+1}$ (réaction de l'élément n + 1) appliqué à la surface externe. Ce moment vaut $\frac{2\,b^i_n}{a^i_n + b^i_n}\,C^i_{n+1}$ par unité de longueur de ligne moyenne.

- Enfin, au moment consécutif au décalage de l'élément n + 1 par rapport à l'élément n qui vaut $F^i_{n+1} \times \delta^i_n$ pour la circonférence externe (ou δ^i_n est la valeur du décalage des milieux des surfaces en contact) soit: $\frac{2\,b^i_n \cdot \delta^i_n \cdot F^i_{n+1}}{a^i_n + b^i_n}$ par unité de longueur de ligne moyenne. Ce moment est positif ou négatif selon la position relative de l'élément n + 1 par rapport à l'élément n.

Comme nous l'avons admis, l'élément n ne se déforme pas par flexion, mais pivote de l'angle (1):

$$\varphi^i_n = \psi^i_n = \frac{12\left(-a^i_n C^i_n + b^i_n C^i_{n+1} \pm b^i_n \delta^i_n F^i_{n+1}\right)}{E\,(h^i_n)^3 \quad \ln \left/\frac{b^i_n}{a^i_n}\right/} \qquad (4)$$

ln/ = logarithme népérien

...

(1)- Timoshenko - Résistance des Matériaux - 2ème Partie - Page 160.

3°- Déformation de la jante -

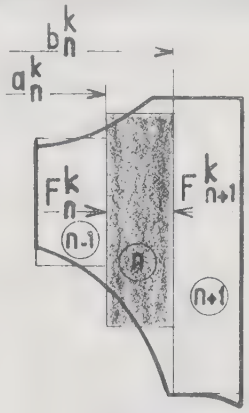


Fig. 11

La jante sera décomposée comme le moyeu en plusieurs éléments unitaires (fig. 11), et nous avons pour chacun d'eux:

$$u_n^k = \frac{a_n^k}{E\,h_n^k} \times \frac{1}{(b_n^k)^2 - (a_n^k)^2} \left\{ \left[(1-\nu)(a_n^k)^2 + (1+\nu)(b_n^k)^2 \right] F_n^k - 2\,(b_n^k)^2\, F_{n+1}^k \right\} \tag{5}$$

$$v_n^k = \frac{b_n^k}{E\,h_n^k} \times \frac{1}{(b_n^k)^2 - (a_n^k)^2} \left\{ 2\,(a_n^k)^2\, F_n^k - \left[(1-\nu)(b_n^k)^2 + (1+\nu)(a_n^k)^2 \right] F_{n+1}^k \right\} \tag{6}$$

$$\varphi_n^k = \psi_n^k = \frac{12\,(-a_n^k C_n^k + b_n^k C_{n+1}^k \pm a_n^k F_n^k)}{E\,(h_n^k)^3 \ln\left/\frac{b_n^k}{a_n^k}\right/} \tag{7}$$

4°- Déformation du bandage -

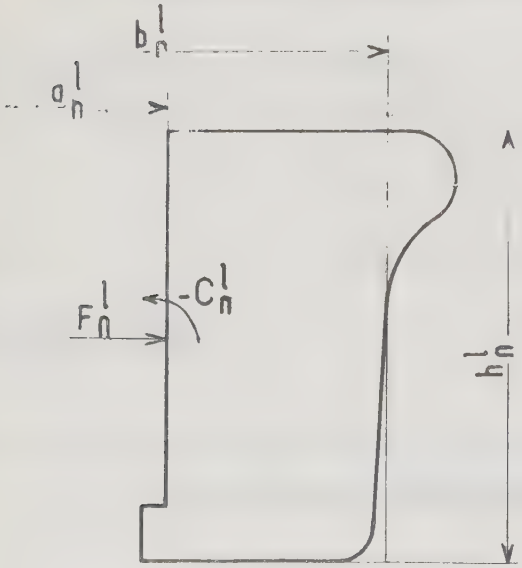


Fig. 12

Sous l'effet du frettage, le bandage sera soumis à une force $-F_n^l$ et un couple $-C_n^l$ appliqués sur la face interne (fig. 12).

Nous considérons le bandage comme un anneau à section méridienne rectangulaire admettant comme surface l'aire de la section méridienne du bandage, la surface cylindrique de frettage restant inchangée.

...

Nous aurons: (1)

$$u_n^1 = \frac{a_n^1}{E\, h_n^1} \times \frac{1}{(b_n^1)^2 - (a_n^1)^2} F_n^1 \left[(1 - \nu)(a_n^1)^2 + (1 + \nu)(b_n^1)^2 \right] \qquad (8)$$

$$\varphi_n^1 = \frac{+ 12\, a_n^1 \left(- C_n^1 \pm \delta_n^1 F_n^1 \right)}{E (h_n^1)^3 \ln \left/ \frac{b_n^1}{a_n^1} \right/} \qquad (9)$$

5°- Déformation du voile -

A- Voile plan -

Effet des forces: Les déformations sont données encore par les expressions utilisées ci-dessus. Nous aurons:

$$u_n^j = \frac{a_n^j}{E\, h_n^j} \times \frac{1}{(b_n^j)^2 - (a_n^j)^2} \left\{ \left[(1 - \nu)(a_n^j)^2 + (1 + \nu)(b_n^j)^2 \right] F_n^j - 2 (b_n^j)^2 F_{n+1}^j \right\} \qquad (10)$$

$$v_n^j = \frac{b_n^j}{E\, h_n^j} \times \frac{1}{(b_n^j)^2 - (a_n^j)^2} \left\{ 2 (a_n^j)^2 F_n^j - \left[(1 - \nu)(b_n^j)^2 + (1 + \nu)(a_n^j)^2 \right] F_{n+1}^j \right\} \qquad (11)$$

....

---

(1)- L'influence du boudin sur la déformation d'ensemble du bandage est négligeable comme nous avons pu l'établir par un calcul approximatif.

D'autre part, nous avions envisagé de considérer la jante et le bandage comme un anneau mince, ce qui permettait d'appliquer la formule donnant l'allongement radial de leur ligne moyenne:

$$\Delta m = \frac{\Phi}{E} \frac{m^2}{S}$$

Φ = force appliquée par unité de longueur de la ligne moyenne
m = rayon de la ligne moyenne
S = aire de la section méridienne.

mais l'application de cette formule à un anneau admettant les caractéristiques dimensionnelles d'un bandage a démontré que nous commettions une erreur par défaut de l'ordre de 15 % sur les déformations.

Et les contraintes dues aux forces radiales au point P distant initialement de r de l'axe, sont:

$$\sigma_r = \frac{1}{h\left[(b_n^j)^2 - (a_n^j)^2\right]}\left[(a_n^j)^2 F_n^j - (b_n^j)^2 F_{n+1}^j + \frac{1}{(r)^2}(F_{n+1}^j - F_n^j)(a_n^j)^2 (b_n^j)^2\right] \quad (12)$$

$$\sigma_t = \frac{1}{h\left[(b_n^j)^2 - (a_n^j)^2\right]}\left[(a_n^j)^2 F_n^j - (b_n^j)^2 F_{n+1}^j - \frac{1}{(r)^2}(F_{n+1}^j - F_n^j)(a_n^j)^2 (b_n^j)^2\right] \quad (13)$$

Effet des moments - (fig. 13)

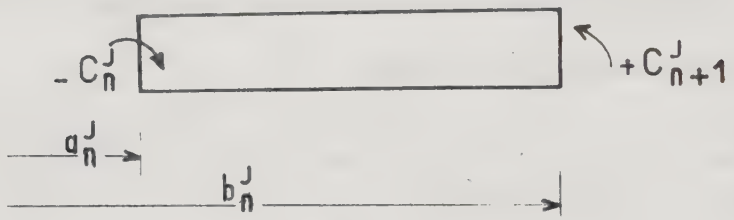


Fig. 13

Le voile est déformé par flexion sous l'action:

- d'un moment $-C_n^j$ appliqué sur son périmètre intérieur
- d'un moment $+C_{n+1}^j$ appliqué sur son périmètre extérieur.

Nous admettrons que les forces radiales agissant sur le voile n'ont aucun effet sur sa déformation par flexion.

Les pivotements des faces intérieures et extérieures sont (1):

$$\varphi_n^j = A_1 \cdot a_n^j + \frac{A_2}{a_n^j} \quad (14)$$

$$\psi_n^j = A_1 \cdot b_n^j + \frac{A_2}{b_n^j} \quad (15)$$

...

(1)- Timoshenko: Théorie des plaques et coques: page 60

A_1 et A_2 ayant pour valeur:

$$A_1 = \frac{(b_n^j)^2 \; C_{n+1}^j - (a_n^j)^2 \; C_n^j}{(1+\nu)\,K\left[(b_n^j)^2 - (a_n^j)^2\right]} \qquad (16)$$

$$A_2 = \frac{(a_n^j)^2 \; (b_n^j)^2 \; (C_{n+1}^j - C_n^j)}{(1-\nu)\,K\left[(b_n^j)^2 - (a_n^j)^2\right]} \qquad (17)$$

Les moments au point courant P distant initialement de r de l'axe, sont:

$$M_r = K\left[A_1 - \frac{A_2}{(r)^2} + \nu\left(A_1 + \frac{A_2}{(r)^2}\right)\right] \qquad (18)$$

$$M_t = K\left[A_1 + \frac{A_2}{(r)^2} + \nu\left(A_1 - \frac{A_2}{(r)^2}\right)\right] \qquad (19)$$

Et les contraintes de flexion en surface du voile (où elles sont maximales) valent:

$$\sigma_r = \pm \frac{6\,M_r}{(h_n^j)^2} \qquad \sigma_t = \pm \frac{6\,M_t}{(h_n^j)^2} \qquad (20)$$

B - Voile semi-conique -

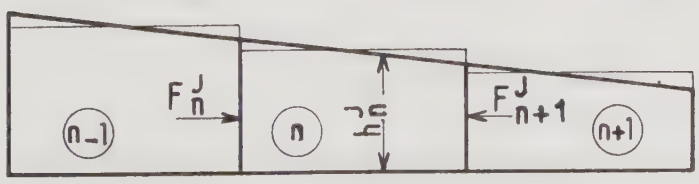


Fig 14

Dans ce cas, nous décomposerons le voile en plusieurs éléments plans (fig. 14) et nous appliquerons les formules indiquées ci-dessus.

Toutefois, si les plans médians des éléments sont décalés, nous serons conduits à introduire les moments complémentaires produits par les forces radiales.

Ainsi pour l'élément n ce moment complémentaire appliqué sur la surface extérieure aura pour expression $\frac{1}{2}\ (h_n^j - h_{n+1}^j)\ F_{n+1}^j$

C- Voile conique (1) - fig. 15 -

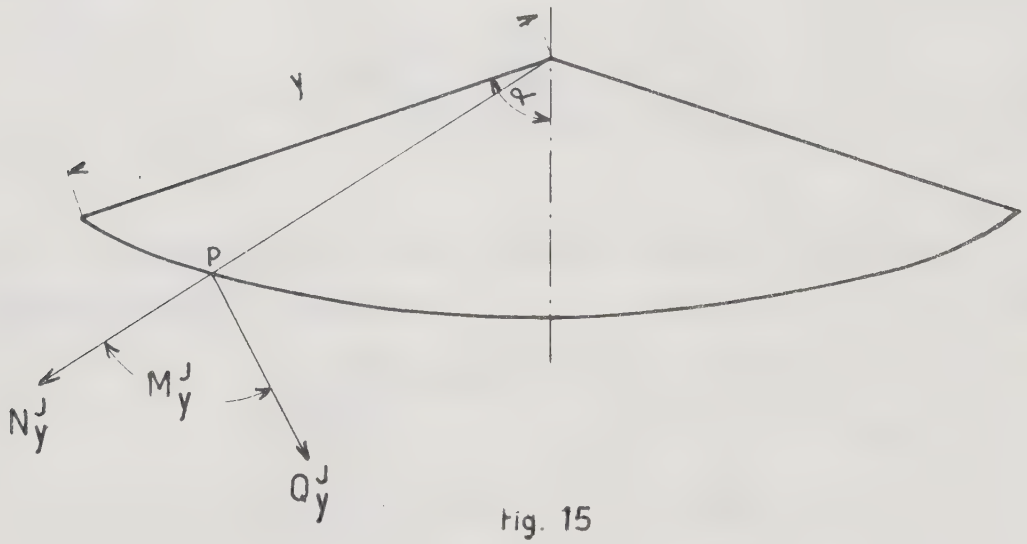


Fig. 15

Si y est la distance au sommet du point courant,

α le demi angle du cône

l'effort tranchant Q_y^j est donné par l'expression:

$$y\,Q_y^j(x) = B_1\left[\psi_1(x) + \frac{2}{x}\psi_2'(x)\right] + B_2\left[\psi_2(x) - \frac{2}{x}\psi_1'(x)\right] + B_3\left[\psi_3(x) + \frac{2}{x}\psi_4'(x)\right] + B_4\left[\psi_4(x) - \frac{2}{x}\psi_3'(x)\right] \qquad (21)$$

ou B_1, B_2, B_3 et B_4 sont des constantes

ψ_1, ψ_2, ψ_3 et ψ_4 des fonctions connues de la variables x :

$$x = 2\lambda\sqrt{y} \quad \text{avec} \quad \lambda = \sqrt[4]{\frac{12\left[1-(\nu)^2\right]}{(h)^2}\ \cot g^2\alpha}$$

ψ_1', ψ_2', ψ_3' et ψ_4' les dérivées premières des fonctions ψ dont nous connaissons également les valeurs.

...

(1)- Timoshenko: Théorie des plaques et coques - Page 454

De même nous avons l'expression des forces

$$N_y^j(x) = -\frac{tg\,\alpha}{y}\left\{ B_1\left[\psi_1 + \frac{2}{x}\psi'_2\right] + B_2\left[\psi_2 - \frac{2}{x}\psi'_1\right] + B_3\left[\psi_3 + \frac{2}{x}\psi'_4\right] + B_4\left[\psi_4 - \frac{2}{x}\psi'_3\right]\right\} \tag{22}$$

$$N_\theta^j(x) = -\frac{tg\,\alpha}{y}\left\{ B_1\left[\frac{x}{2}\psi'_1 - \psi_1 - \frac{2}{x}\psi'_2\right] + B_2\left[\frac{x}{2}\psi'_2 - \psi_2 + \frac{2}{x}\psi'_1\right] + B_3\left[\frac{x}{2}\psi'_3 - \psi_3 - \frac{2}{x}\psi'_4\right] + B_4\left[\frac{x}{2}\psi'_4 - \psi_4 + \frac{2}{x}\psi'_3\right]\right\} \tag{23}$$

et les moments:

$$M_y^j(x) = \frac{2}{x^2}\left\{ B_1\left[\frac{4}{x}(-1+\nu)\,\psi'_1 + 2(1-\nu)\,\psi_2 - x\,\psi'_2\right] + B_2\left[-\frac{4}{x}(1-\nu)\,\psi'_2 + 2(-1+\nu)\psi_1 + x\,\psi'_1\right] + B_3\left[\frac{4}{x}(-1+\nu)\,\psi'_3 + 2(1-\nu)\psi_4 - x\,\psi'_4\right] + B_4\left[-\frac{4}{x}(1-\nu)\,\psi'_4 + 2(-1+\nu)\psi_3 + x\,\psi'_3\right]\right\} \tag{24}$$

$$M_\theta^j(x) = \frac{2}{x^2}\left\{ B_1\left[2(1-\nu)\,\psi_2 - \nu x\,\psi'_2 + (1-\nu)\frac{4}{x}\,\psi'_1\right] + B_2\left[2(1-\nu)\,\psi_1 + \nu x\,\psi'_1 + (1-\nu)\frac{4}{x}\,\psi'_2\right] + B_3\left[2(1-\nu)\,\psi_4 - \nu x\,\psi'_4 + (1-\nu)\frac{4}{x}\,\psi'_3\right] + B_4\left[2(1-\nu)\,\psi_3 + \nu x\,\psi'_3 + (1-\nu)\frac{4}{x}\,\psi'_4\right]\right\} \tag{25}$$

oooo

L'accroissement δ du rayon du cercle parallèle de coordonnée y vaut:

$$\delta(x) = -\frac{\sin\alpha \operatorname{tg}\alpha}{2Eh}\left\{ B_1\left[x\psi'_1 - 2\psi_1 - \frac{4}{x}\psi'_2\right] + B_2\left[x\psi'_2 - 2\psi_2 + \frac{4}{x}\psi'_1\right]\right.$$
$$\left. + B_3\left[x\psi'_3 - 2\psi_3 - \frac{4}{x}\psi'_4\right] + B_4\left[x\psi'_4 - 2\psi_4 - \frac{4}{x}\psi'_3\right]\right\}$$
$$+\frac{V \sin\alpha \operatorname{tg}\alpha}{Eh}\left\{ B_1\left[\psi_1 + \frac{2}{x}\psi'_2\right] + B_2\left[\psi_2 - \frac{2}{x}\psi'_1\right]\right.$$
$$\left. + B_3\left[\psi_3 + \frac{2}{x}\psi'_4\right] + B_4\left[\psi_4 - \frac{2}{x}\psi'_3\right]\right\} \qquad (26)$$

Enfin le pivotement V du voile au point de coordonnée y s'écrit:

$$V(x) = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{Eh}\left\{ B_1\left[\lambda^2\ \psi_2 - \frac{\lambda}{\sqrt{y}}\psi'_1\right] + B_2\left[-\lambda^2\ \psi_1 - \frac{\lambda}{\sqrt{y}}\psi'_2\right]\right.$$
$$\left. + B_3\left[\lambda^2\ \psi_4 - \frac{\lambda}{\sqrt{y}}\psi'_3\right] + B_4\left[-\lambda^2\ \psi_3 - \frac{\lambda}{\sqrt{y}}\psi'_4\right]\right\} \qquad (27)$$

Les contraintes supportées par le voile sont la somme de celles dues aux forces et celles dues aux moments.

Ainsi en surface du voile nous aurons:

$$\sigma_y = \frac{M_y^J}{h_n^J} \pm \frac{6\,M_y^J}{(h_n^J)^2}$$

$$\sigma_\theta = \frac{M^J}{h_n^J} \pm \frac{6\,M^J}{(h_n^J)^2} \qquad (28)$$

Aux limites du voile (fig. 16) la variable x a respectivement pour expression:

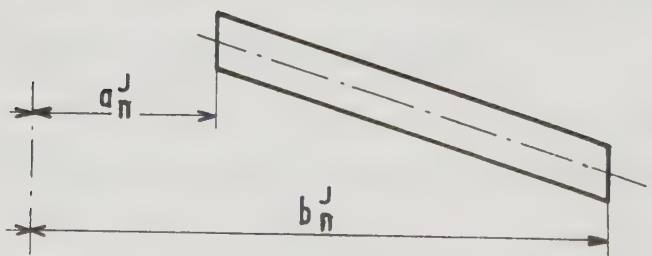


Fig. 16

$$x^J_{a_n} = 2\lambda\sqrt{\frac{a_n^J}{\sin\alpha}} \qquad (29)$$

$$x^J_{b_n} = 2\lambda\sqrt{\frac{b_n^J}{\sin\alpha}} \qquad (30)$$

Ainsi les conditions aux limites sont :

Pour le bord intérieur du voile ($x = x^J_{a_n}$)

$$F^J_n = Q^J_y (x^J_{a_n}) \cdot \cos \alpha - N^J_y (x^J_{a_n}) \cdot \sin \alpha \quad (31)$$

$$C^J_n = M^J_y (x^J_{a_n}) \quad (32)$$

$$u^J_n = \delta (x^J_{a_n}) \quad (33)$$

$$\varphi^J_n = V (x^J_{a_n}) \quad (34)$$

Pour le bord extérieur ($x = x^J_{b_n}$)

$$F^J_{n+1} = Q^J_y (x^J_{b_n}) \cdot \cos \alpha - N^J_y (x^J_{b_n}) \cdot \sin \alpha \quad (35)$$

$$C^J_{n+1} = M^J_y (x^J_{b_n}) \quad (36)$$

$$v^J_n = \delta (x^J_{b_n}) \quad (37)$$

$$\psi^J_n = V (x^J_{b_n}) \quad (38)$$

D - Voile de forme quelconque -

Un voile de forme quelconque pourra être décomposé en plusieurs éléments plans, semi-coniques, ou coniques et son étude sera faite en utilisant les diverses formules indiquées ci-dessus.

*
* * *

...

6°- Résolution -

Remarquons tout d'abord que les constantes que nous avons introduites pour l'étude de la déformation du voile plan (A_1 à A_2) ou du voile conique (B_1, B_2, B_3 et B sont définies par les conditions aux limites, en fonction des forces et des moments qu agissent en bordure du voile.

Ainsi les seules inconnues que nous devons déterminer sont les forces F et les couples C.

a/- Cas du calage -

La roue et l'essieu se composant de N éléments, nous avons introduit (N - 1 forces et (N - 1) couples.

Si r est le rayon de l'alésage du moyeu, le rayon de l'essieu est $r + \frac{s}{2}$ (s = serrage). Après calage, le rayon de l'alésage du moyeu vaut: $r + u_2^i$, celui de l'essieu $r + \frac{s}{2} + v_1^g$.

Nous avons: $$r + \frac{s}{2} + v_1^g = r + u_2^i$$

$$\frac{s}{2} + v_1^g = u_2^i$$

et successivement : $$v_2^i = u_3^i$$

$$v_3^i = u_4^i$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$v_{N-1} = u_N$$

ce qui donne (N - 1) égalités.

....

D'après les hypothèses que nous avons faites, nous devons considérer le voile comme encastré dans le moyeu.

Les couples qu'il faut connaître sont ceux agissant sur le voile, la jante et, éventuellement, le bandage. Ils sont au nombre de $N - p$ (p étant le dernier élément du moyeu). Nous avons $N - p$ équations d'égalité des pivotements:

$$0 = \varphi_{p+1} \quad \text{(Equation d'encastrement)}$$

$$\psi_{p+1} = \varphi_{p+2}$$

$$\psi_{p+2} = \varphi_{p+3}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\psi_{N-1} = \varphi_{N}$$

qui jointes aux $(N - 1)$ égalités des déformations radiales déterminent les $2N - p - 1$ inconnues que nous recherchons.

Les $(p - 1)$ couples qui agissent sur l'essieu et les éléments du moyeu peuvent être déterminés en écrivant en complément que les p éléments de l'essieu et du moyeu ont un pivotement nul (ce qui donne $p - 1$ équations).

b/- Cas du frettage -

La roue et l'essieu se composant de N éléments, nous avons $(N - 1)$ forces et $(N - 1)$ couples.

Si R est le rayon de l'alésage du bandage, le rayon de la surface extérieure de la jante est $R + \frac{S}{2}$.

...

Après frettage, le rayon de l'alésage du bandage est $R + u_N^1$, celui de la face extérieure de la jante $R + \frac{S}{2} + v_{N-1}^k$

Nous avons: $$R + \frac{S}{2} + v_{N-1}^k = R + u_N^1$$

$$\frac{S}{2} + v_{N-1}^k = u_N^1$$

et successivement: $$v_{N-2}^k = u_{N-1}^k$$

$$v_{N-3}^k = u_N^k - 2$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$v_1 = u_2$$

ce qui donne $(N - 1)$ égalités.

Si la roue est déjà calée sur un essieu, nous avons les $(N - p)$ égalités de pivotement indiquées ci-dessus et le système de $2N - p - 1$ inconnues est résolu.

Si, au contraire, la roue n'est pas calée, nous avons les $(N - 1)$ égalités:

$$\varphi_N = \psi_{N-1}$$

$$\varphi_{N-1} = \psi_{N-2}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\varphi_3 = \psi_2$$

$$\varphi_2 = \psi_1$$

qui permettent la détermination des $2N - 2$ inconnues.

*
* * *

...

7°- Influence de l'usinage des surfaces de frettage et de calage -

Dans certains cas, nous avons constaté que les surfaces préparées pour le calage (ou le frettage) n'étaient pas parfaitement cylindriques.

Pour la détermination des forces, nous prendrons la cote moyenne.

Mais, pour le calcul des couples, nous sommes conduits à introduire un moment complémentaire.

La force n'est pas répartie de façon homogène, sur toute la hauteur de la surface, nous admettrons en première approximation qu'elle est proportionnelle au serrage en chaque point.

Cette force pourra être représentée par la surface d'un trapèze rectangle dont la hauteur est la hauteur utile (z) du calage (fig. 17).

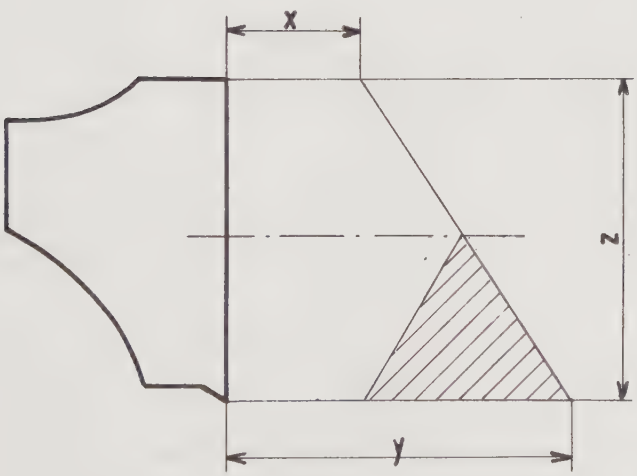


Fig. 17

Les bases x et y seront déterminées en écrivant:

1°- que leur rapport $\frac{x}{y}$ est égal au rapport des serrages aux points extrêmes du calage,

2°- que la surface du trapèze est égale à la valeur de la force.

La surface hachurée représente la partie de la force qui produit le moment que nous recherchons. Elle vaut $\frac{z}{4}(y - x)$ et le moment complémentaire a pour expression:

$$\frac{(z)^2}{12}(y - x) \qquad (39)$$

...

DEUXIEME PARTIE

EFFET D'UNE FORCE LOCALISEE APPLIQUEE SUR LA PERIPHERIE DE LA ROUE

DEUXIEME PARTIE

EFFET D'UNE FORCE LOCALISEE APPLIQUEE SUR LA PERIPHERIE DE LA ROUE

Les déformations et les contraintes produites dans le voile par l'action d'une force localisée appliquée sur la périphérie de la roue seront déterminées en étudiant les déformations, d'une part, de la jante (ou de l'ensemble bandage-jante pour les roues bandagées) considérée comme un anneau mince, d'autre part, du voile supposé encastré dans le moyeu (1).

Cette supposition est justifiée du fait que le moyeu, de dimensions importantes, est calé sur l'essieu-axe.

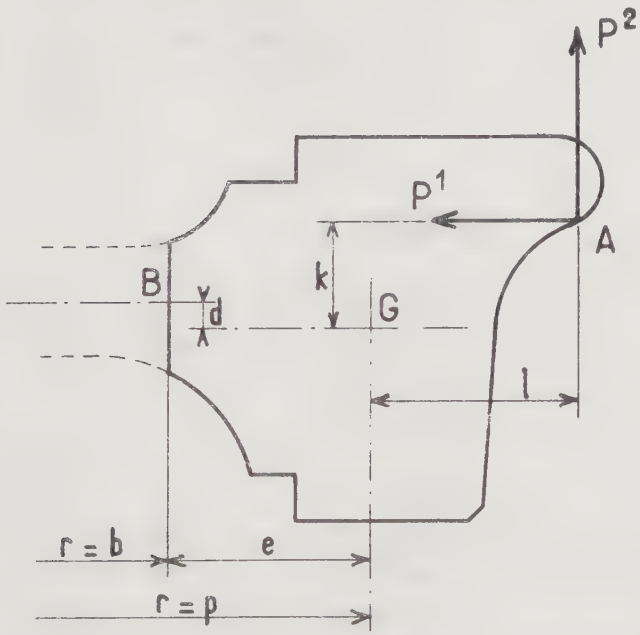


Fig. 18

La force localisée admet deux composantes:

P^1 verticale dirigée suivant un rayon de la roue (sens + vers l'axe de la roue)

P^2 horizontale dirigée parallèlement à l'axe de l'essieu (sens + dirigé côté boudin vers l'intérieur de la roue).

Le point d'application A de la force est repéré par rapport au centre de gravité de la section méridienne de la jante ou de l'ensemble bandage-jante (fig. 18).

...

(1)- Nous avons considéré comme limites du voile, des surfaces cylindriques prises dans les congés de raccordement du voile avec le moyeu et avec la jante (voir figure n° 18). Il est bien évident que les déformations du voile intéressent partiellement ces congés.

Les forces de liaison entre la jante et le voile peuvent être représentées par des forces et des moments répartis le long de la circonférence de raccordement.

Ainsi le voile est soumis sur sa périphérie extérieure (Point B) à un ensemble de forces et de moments que l'on peut définir par unité de longueur par les séries trigonométriques ci-après (voir fig. 19 et 20).

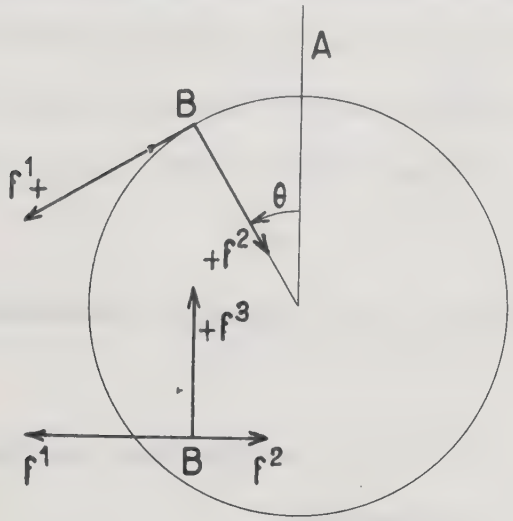


Fig. 19

- FORCES -

$$f^1 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^1 \sin n\theta \qquad (40)$$

$$f^2 = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^2 \cos n\theta \qquad (41)$$

$$f^3 = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^3 \cos n\theta \qquad (42)$$

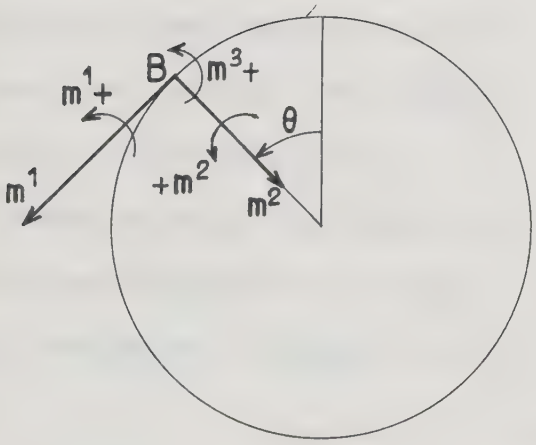


Fig. 20

- MOMENTS -

$$m^1 = \sum_{n=0}^{\infty} m_n^1 \cos n\theta \qquad (43)$$

$$m^2 = \sum_{n=1}^{\infty} m_n^2 \sin n\theta \qquad (44)$$

$$m^3 = \sum_{n=1}^{\infty} m_n^3 \sin n\theta \qquad (45)$$

Du fait que les forces appliquées à la jante sont dans le plan méridien de la roue, ce moment m^3 est identiquement nul.

...

La détermination des déformations et des contraintes du voile se fera en exprimant, d'une part, que le voile est encastré dans le moyeu; d'autre part, en identifiant les déformations et les sollicitations subies par la périphérie extérieure du voile avec celles du périmètre intérieur de la jante.

...

CHAPITRE I

DEFORMATION DE LA JANTE (ou de l'ensemble bandage-jante)

La jante (ou l'ensemble bandage-jante) sera considérée comme solide à ligne moyenne (1). Il est soumis, d'une part, à la force localisée; d'autre part, à l'ensemble des forces $-f^1$, $-f^2$ et $-f^3$, aux moments $-m^1$ et $-m^2$ appliqués sur le périmètre B.

L'étude de sa déformation sera faite à l'aide des équations différentielles de la ligne élastique d'un solide à ligne moyenne plane que nous allons rappeler et du théorème de Castigliano.

*
* * *

1/- EQUATIONS DIFFERENTIELLES DE LA LIGNE ELASTIQUE D'UN SOLIDE A LIGNE MOYENNE PLANE (RAPPELS) -

La déformation de la ligne moyenne est définie par le déplacement u et le pivotement φ rapportés à un système d'axes de coordonnées Ox^1, Ox^2, Ox^3

$$\vec{u}\ (u^1,\ u^2,\ u^3)\quad \vec{\varphi}\ (\ \varphi^1,\ \varphi^2,\ \varphi^3)$$

Si:

s est l'abscisse curviligne d'un point de la ligne moyenne

e^{11}_G l'allongement unitaire porté sur la tangente Gy^1 à cette ligne

g^{12}_G la projection du glissement unitaire sur la normale principale Gy^2 à la ligne moyenne

g^{13}_G la projection du glissement unitaire sur la binormale Gy^3 à cette même ligne

B^1 l'angle unitaire de torsion

B^2, B^3 les projections sur Gy^2 et Gy^3 de l'angle unitaire de flexion

..

(1)- Les dimensions de l'ensemble bandage-jante sont relativement grandes par rapport au rayon de la roue (de l'ordre du 1/5,1/6). L'emploi des formules applicables à un anneau mince constitue une première approximation.

Les équations différentielles de la déformée sont:

$$\frac{du^1}{ds} = e^{11}_G \frac{dx^1}{ds} - (g^{12}_G + \varphi^3) \frac{dx^2}{ds}$$

$$\frac{du^2}{ds} = e^{11}_G \frac{dx^2}{ds} + (g^{12}_G + \varphi^3) \frac{dx^1}{ds}$$

$$\frac{du^3}{ds} = g^{13}_G + \varphi^1 \frac{dx^3}{ds} - \varphi^2 \frac{dx^1}{ds}$$

$$\frac{d\varphi^1}{ds} = F^1 \frac{dx^1}{ds} - B^2 \frac{dx^2}{ds}$$

$$\frac{d\varphi^2}{ds} = B^1 \frac{dx^2}{ds} + B^2 \frac{dx^1}{ds}$$

$$\frac{d\varphi^3}{ds} = B^3$$

D'autre part, si M^1, M^2, M^3 sont les composantes du moment résultant des forces situées du côté positif de la ligne moyenne et, en admettant que les axes principaux d'inertie de la section méridienne soient confondus avec la tangente, la normale et la binormale à la ligne moyenne (1) nous avons:

$$B^1 = \frac{M^1}{\mu J}$$ (μJ étant la rigidité de torsion de l'anneau)

$$B^2 = \frac{M^2}{EI^2}$$ (I^2 étant le moment d'inertie suivant l'axe Gy^2)

$$B^3 = \frac{M^3}{EI^3}$$ (I^3 étant le moment d'inertie suivant l'axe Gy^3)

Les équations différentielles de la déformée s'écrivent alors dans le cas où la ligne moyenne est circulaire de rayon ρ et en négligeant l'effet des glissements unitaires g^{12}_G, g^{13}_G et de l'allongement unitaire e^{11}_G de la ligne moyenne,

....

(1)- ce qui n'est pas rigoureusement exact à cause, en particulier, du boudin.

ce qui est valable pour un anneau admettant une section méridienne dont les deux dimensions sont importantes:

$$\frac{1}{\rho}\frac{du^1}{d\theta} = -\varphi^3 \cos\theta \qquad (46)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{du^2}{d\theta} = -\varphi^3 \sin\theta \qquad (47)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{du^3}{d\theta} = \varphi^1 \cos\theta + \varphi^2 \sin\theta \qquad (48)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\varphi^1}{d\theta} = -\frac{M^1}{\mu J}\sin\theta - \frac{M^2}{EI^2}\cos\theta \qquad (49)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\varphi^2}{d\theta} = \frac{M^1}{\mu J}\cos\theta - \frac{M^2}{EI^2}\sin\theta \qquad (50)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\varphi^3}{d\theta} = \frac{M^3}{EI^3} \qquad (51)$$

*
* * *

2/- EQUATIONS D'EQUILIBRE -

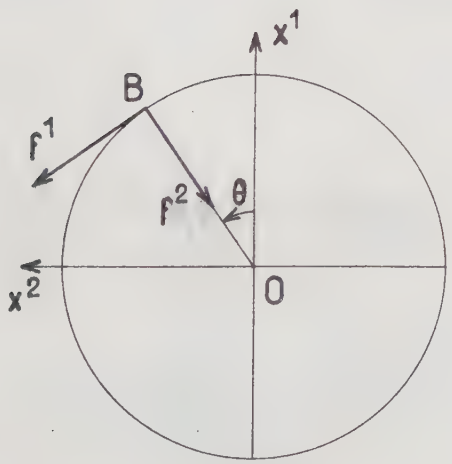


Fig. 21

La somme des projections de f^1 et f^2 sur l'axe Ox^1 est égale à P^1 (fig. 21):

$$\int_0^{2\pi} f^1 \sin\theta \, d\theta + \int_0^{2\pi} f^2 \cos\theta \, d\theta = P^1$$

ce qui donne l'égalité:

$$f_1^1 + f_1^2 = \frac{P^1}{\pi b} \qquad (52)$$

....

La somme des projections de f^1 et de f^2 sur Ox^2 est identiquement nulle.

Enfin, nous aurons:

$$b\int_0^{2\pi} f^3 \, d\theta = b\int_0^{2\pi} \left(f_o^3 + f_1^3 \cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty} f_n^3 \cos n\theta\right) d\theta = P^2$$

ce qui donne: $f_o^3 = \frac{P^2}{2\pi b}$ (53

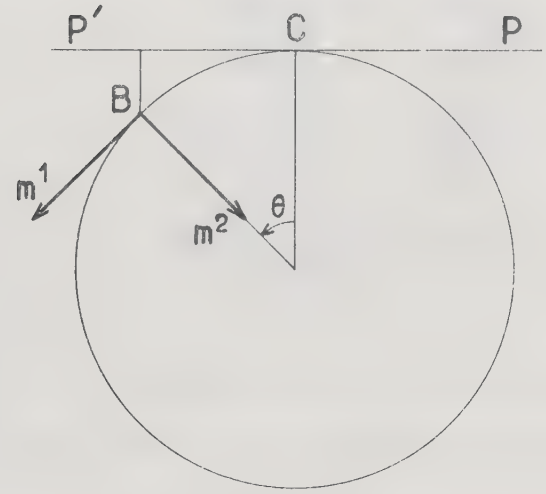


Fig. 22

Les forces localisées appliquées en A donnent suivant la tangente P'P en C à la c conférence limitant extérieurement le voile (fig. 22) le moment:

$$-\left[(k-d)\,P^1 + (e+1)\,P^2\right]$$

Les forces et les moments agissant sur le voile donnent un moment par rapport à l'a P'P égal à:

$$b^2\int_0^{2\pi} f^3 (1-\cos\theta)\, d\theta + b\int_0^{2\pi} m^1 \cos\theta \, d\theta - b\int_0^{2\pi} m^2 \sin\theta \, d\theta$$

Ces deux valeurs sont égales, donc:

$$b^2\int_0^{2\pi} f^3 (1-\cos\theta)\, d\theta + b\int_0^{2\pi} m^1 \cos\theta \, d\theta - b\int_0^{2\pi} m^2 \sin\theta \, d\theta = -\left[(k-d)\,P^1 + (e+1)\,P^2\right]$$

..

ce qui donne:

$$b\,(2\,f_o^3 - f_1^3) + m_1^1 - m_1^2 = -\frac{1}{b\,\pi}\left[\,(k-d)\,P^1 + (e+1)\,P^2\,\right]$$

qui s'écrit:

$$m_1^2 - m_1^1 + b\,f_1^3 = \frac{1}{b\,\pi}\left[\,(k-d)\,P^1 + (e+1+b)\,P^2\,\right] \qquad (54)$$

*
* * *

3/- ELEMENTS DE REDUCTION DES FORCES -

Nous allons maintenant établir les éléments de réduction M^1, M^2, M^3 au point G de la ligne moyenne de la jante ou de l'ensemble bandage-jante (1)

Pour cela, nous allons supposer l'existence d'une coupe radiale en C. L'extrémité libre C' de l'anneau est alors soumise au torseur:

$$R_o^1\ ,\quad R_o^2 = \frac{P^1}{2}\ ,\quad R_o^3 = \frac{P^2}{2}$$

$$M_o^1 = -\frac{1}{2}\,(l\,P^2 + k\,P^1),\quad M_o^2\ ,\quad M_o^3$$

ou R_o^1, M_o^2 et M_o^3 sont des constantes que nous déterminerons par l'application du théorème de Castigliano, en écrivant que les sections C et C' restent rigoureusement confondues.

.....

(1)- Les éléments de réduction des forces R^1 (Effort normal) R^2 et R^3 (efforts tranchants) ne sont pas donnés. Ils n'interviennent pas dans les calculs que nous ferons du fait même que nous négligeons l'allongement et les glissements de la ligne moyenne.

Moment de torsion M^1

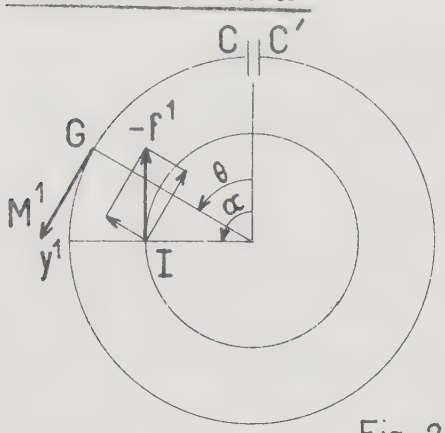


Fig. 23

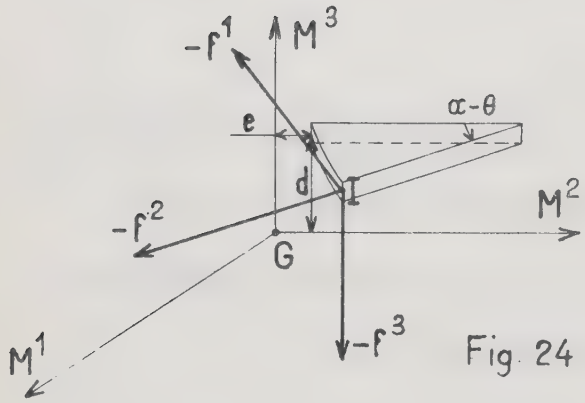


Fig. 24

L'élément de réduction M^1 est la somme de tous les moments par rapport au centre de gravit de la section agissant sur l'anneau du point G à C' projetée sur l'axe Gy^1 (fig. 23 et 24).

La force $-f^1$ appliquée au point I $(b\alpha)$ donne un moment M^1 au point G $(\rho\theta)$ égal à

$$d f^1 \sin(\alpha - \theta)$$

de même $-f^2$ donne $d f^2 \cos(\alpha - \theta)$

et $-f^3 \left[-\rho - b\cos(\alpha - \theta)\right] . f^3$

Les moments $-m^1$ et $-m^2$ donnent de leur côté

$-m^1 \cos(\alpha - \theta)$ et $+m^2 \sin(\alpha - \theta)$

Ainsi:

$$M^1 = bd \int_\theta^{2\pi} f^1 \sin(\alpha - \theta)\, d\alpha + bd \int_\theta^{2\pi} f^2 \cos(\alpha - \theta)\, d\alpha$$

$$- b \int_\theta^{2\pi} f^3 \left[\rho - b\cos(\alpha - \theta)\right] d\alpha - b \int_\theta^{2\pi} m^1 \cos(\alpha - \theta)\, d\alpha$$

$$- b \int_\theta^{2\pi} m^2 \sin(\alpha - \theta)\, d\alpha + \frac{P^2}{2} \rho (1 - \cos\theta)$$

$$+ \left(\frac{P^2}{2} l + \frac{P^1}{2} k\right) \cos\theta + M_o^2 \sin\theta$$

...

soit tous calculs faits:

$$\frac{P^2}{2}\rho - \rho b (2\pi - \theta) f_o^3 + \cos\theta \left\{ -\frac{P^2}{2}(\rho + 1) - \frac{P^1}{2} k \right.$$
$$\left. + b\left(\pi - \frac{\theta}{2}\right)\left[m_1^2 - m_1^1 + d(f_1^1 + f_1^2) + b f_1^3 \right] \right\}$$
$$+ \sin\theta \left\{ M_o^2 + \frac{1}{2} b (d f_1^1 + m_1^2 - d f_1^2 - b f_1^3 + m_1^1) - b (d f_o^2 + b f_o^3 - m_o^1 - \rho f_1^3) \right.$$
$$\left. + b \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n)^2 - 1} (n d f_n^1 + n m_n^2 + d f_n^2 + b f_n^3 - m_n^1) \right\}$$
$$+ b \sum_{n=2}^{\infty} \sin n\theta \left\{ -\frac{1}{(n)^2 - 1} (d f_n^1 + n d f_n^2 + n b f_n^3 + m_n^2 - m_n^1) + \frac{\rho}{n} f_n^3 \right\}$$

Remarquons que le terme $\frac{P^2}{2}\rho - \rho b (2\pi - \theta) f_o^3$ s'écrit, en tenant compte de l'équation d'équilibre $f_o^3 = \frac{P^2}{2\pi b} - \frac{\rho P^2}{2}\left(-1 + \frac{\theta}{\pi}\right)$ que nous développerons en série de Fourier:

$$\frac{\rho P^2}{2}\left(-\frac{2}{\pi}\sin\theta + \sum_{n=2}^{\infty} -\frac{2}{n\pi}\sin n\theta\right)$$

De même le coefficient de $\cos\theta$

$$\frac{P^2}{2}(\rho + 1) - \frac{P^1}{2} k + b\left(\pi - \frac{\theta}{2}\right)\left[d(f_1^1 + f_1^2) + b f_1^3 - m_1^1 + m_1^2 \right]$$

s'écrit en tenant compte de l'équation d'équilibre desmoments:

$$\frac{1}{2}\left[(\rho + 1) P^2 + k P^1 \right]\left[1 - \frac{\theta}{\pi} \right]$$

et $\frac{1}{2}\left[(\rho + 1) P^2 + k P^1 \right]\left[1 - \frac{\theta}{\pi} \right]\cos\theta$ peut être développé en série de Fourier soit: $\frac{1}{2}\left[(\rho + 1) P^2 + k P^1 \right]\left[\frac{1}{2\pi}\sin\theta + \frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n}{(n)^2 - 1}\sin n\theta \right]$

...

ainsi le moment M^1 s'écrit:

$$M^1 =$$

$$\left\{ -\rho \frac{P^2}{\pi} + \frac{1}{4\pi}\left[(\rho+1)P^2 + kP^1\right] + M_o^2 + \frac{1}{2} b\left[d(f_1^1 - f_1^2) + m_1^2 + m_1^1 - b f_1^3\right] \right.$$

$$- b(d f_o^2 + b f_o^3 - m_o^1 - \rho f_1^3) + b \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n)^2-1}\left[d(n f_n^1 + f_n^2) + n m_n^2 - m_n^1 + b f_n^3\right] \left.\right\} \sin\theta$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty}\left\{ -\frac{\rho P^2}{n\pi} + \frac{1}{\pi}\frac{n}{(n)^2-1}\left[(\rho+1)P^2 + kP^1\right] - \frac{b}{(n)^2-1}\left[d(f_n^1 + n f_n^2) + m_n^2 - m_n^1\right.\right.$$

$$\left.\left. + n b f_n^3\right] + \frac{\rho b}{n} f_n^3 \right\} \sin n\theta$$

soit:

$$\left\{ \frac{1}{4\pi}\left[(1-3\rho)P^2 + kP^1\right] + M_o^2 + b\left[-d f_o^2 - b f_o^3 + m_o^1\right.\right.$$

$$+ \frac{1}{2}\left[d(f_1^1 - f_1^2) + (2\rho - b) f_1^3 + m_1^1 + m_1^2\right]$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n)^2-1}\left[d(n f_n^1 + f_n^2) + b f_n^3 - m_n^1 + n m_n^2\right]\left.\right\} \sin\theta$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty}\left\{ \frac{\rho P^2}{n\pi} + \frac{1}{\pi}\frac{n}{(n)^2-1}\left[(\rho+1)P^2 + kP^1\right]\right.$$

$$\left. + b\left[\frac{-1}{(n)^2-1}\left[d(f_n^1 + n f_n^2) + n b f_n^3 - m_n^1 + m_n^2\right] + \frac{\rho}{n} f_n^3\right]\right\} \sin n\theta \qquad (55)$$

$$= F_1 \sin\theta + \sum_{n=2}^{\infty} F_n \sin n\theta \qquad (55^{bis})$$

Moment de flexion M^2

L'élément de réduction M^2 est la somme de tous les moments par rapport au C de G de la section agissant sur l'anneau du point G à C' projetés sur l'axe Gy^2.

Nous avons:

...

$$M^2 = \frac{P^2}{2}\ \rho \sin\theta + M_o^2 \cos\theta + \left(\frac{P^2}{2} l + \frac{P^1}{2} k\right) \sin\theta - bd \int_\theta^{2\pi} f^1 \cos(\alpha - \theta)\, d\alpha$$

$$+ bd \int_\theta^{2\pi} f^2 \sin(\alpha - \theta)\, d\alpha + (b)^2 \int_\theta^{2\pi} f^3 \sin(\alpha - \theta)\, d\alpha$$

$$- b \int_\theta^{2\pi} \left[m^1 \sin(\alpha - \theta) + m^2 \cos(\alpha - \theta) \right] d\alpha$$

soit tous calculs faits:

$$bd\, f_o^2 + (b)^2 f_o^3 - b\, m_o^1$$

$$+ \left\{ \frac{P^2}{2} (\rho + 1) + \frac{P^1}{2} k - \left(\pi - \frac{\theta}{2}\right) \left[bd\, f_1^1 + b m_1^2 + bd\, f_1^2 + (b)^2 f_1^3 - b\, m_1^1 \right] \right\} \sin\theta$$

$$+ \left\{ M_o^2 - \left(bd\, f_o^2 + (b)^2 f_o^3 - b\, m_o^1\right) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n)^2 - 1} \left[nb\,(d\, f_n^1 + m_n^2) + b\,(d\, f_n^2 + b\, f_n^3 - m_n^1) \right] \right\} \cos\theta$$

$$+ b \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n)^2 - 1} \left\{ - n\,(d\, f_n^1 + m_n^2) - (d\, f_n^2 + b\, f_n^3 - m_n^1) \right\} \cos n\theta$$

Remarquons que le coefficient de sinus θ s'écrit en tenant compte de l'équation d'équilibre des moments:

$$\frac{1}{2} \left[(\rho + 1) P^2 + k P^1 \right] \left[\frac{\theta}{\pi} - 1 \right]$$

et $\frac{1}{2} \left[(\rho + 1) P^2 + k P^1 \right] \left[\frac{\theta}{\pi} - 1 \right] \sin\theta$ développé en série de Fourier s'écrit:

$$\left[(\rho + 1) P^2 + k P^1 \right] \left[-\frac{1}{2\pi} - \frac{1}{4\pi} \cos\theta + \frac{1}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n)^2 - 1} \cos n\theta \right]$$

ainsi le moment M^2 s'écrit:

$$b\left[d\,f_o^2 + b\,f_o^3 - m_o^1\right] - \frac{1}{2\pi}\left[(\rho+1)P^2 + k\,P^1\right]$$

$$+\left\{-\frac{1}{4\pi}\left[(\rho+1)P^2 + k\,P^1\right] + M_o^2 - b\,(d\,f_o^2 + b\,f_o^3 - m_o^1)\right.$$

$$\left. + b\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n)^2-1}\left[n\,(d\,f_n^1 + m_n^2) + d\,f_n^2 + b\,f_n^3 - m_n^1\right]\right\}\cos\theta$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n)^2-1}\left\{\frac{1}{\pi}\left[(\rho+1)P^2 + k\,P^1\right] - b\left[n\,(d\,f_n^1 + m_n^2) + d\,f_n^2 + b\,f_n^3 - m_n^1\right]\right\}\cos n$$

soit:

$$b\left[d\,f_o^2 + b\,f_o^3 - m_o^1\right] - \frac{1}{2\pi}\left[(\rho+1)P^2 + k\,P^1\right]$$

$$+\left\{-\frac{1}{4\pi}\left[(\rho+1)P^2 + k\,P^1\right] + M_o^2 + b\left[-d\,f_o^2 - b\,f_o^3 + m_o^1\right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n)^2-1}\left[d\,(n\,f_n^1 + f_n^2) + b\,f_n^3 - m_n^1 + n\,m_n^2\right]\right]\right\}\cos\theta$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n)^2-1}\left\{\frac{1}{\pi}\left[(\rho+1)P^2 + k\,P^1\right] - b\left[d\,(n\,f_n^1 + f_n^2)\right.\right.$$

$$\left.\left. + b\,f_n^3 - m_n^1 + n\,m_n^2\right]\right\}\cos n\theta \qquad (56)$$

$$= G_o + G_1\cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty} G_n\cos n\theta \qquad (56^{bi})$$

Moment de flexion M^3

L'élément de réduction M^3 est la somme de tous les moments par rapport au C de G de la section agissant sur l'anneau du point G à C' projetés sur l'axe Gy^3.

Nous avons:

$$M_o^3 - \frac{P^1}{2}\rho\sin\theta + R_o^1\,\rho\,(1-\cos\theta) + b\int_{\theta}^{2\pi} f^1\left[\rho\cos(\alpha-\theta) - b\right]d$$

$$- b\rho\int_{\theta}^{2\pi} f^2\sin(\alpha-\theta)\,d\alpha$$

...

soit tous calculs faits:

$$M_o^3 + \rho R_o^1 + (b)^2 f_1^1 - \rho b f_o^2 + b \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} b f_n^1$$

$$+ \left\{ - \frac{P^1}{2} \rho + \left(\pi - \frac{\theta}{2} \right) b \rho \left(f_1^1 + f_2^2 \right) \right\} \sin\theta$$

$$+ \left\{ - R_o^1 \rho - (b)^2 f_1^1 + \rho b f_o^2 - \rho b \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n)^2 - 1} \left(n f_n^1 + f_n^2 \right) \right\} \cos\theta$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ - \frac{b^2}{n} f_n^1 + \frac{\rho b}{(n)^2 - 1} \left(n f_n^1 + f_n^2 \right) \right\} \cos n\theta$$

Le coefficient du terme sinus s'écrit $\frac{\rho P^1}{2} \left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right)$

et $\frac{\rho P^1}{2} \left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right) \sin\theta$ développé en série de Fourier:

$$\frac{\rho P^1}{2} \left[\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \cos\theta - \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n)^2 - 1} \cos n\theta \right]$$

ainsi le moment M^3 s'écrit:

$$M_o^3 + \rho R_o^1 + (b)^2 f_1^1 - \rho b f_o^2 + \frac{\rho P^1}{2\pi} + b \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} b f_n^1$$

$$+ \left\{ - R_o^1 \rho - (b)^2 f_1^1 + \rho b f_o^2 + \frac{\rho P^1}{4\pi} - \rho b \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n)^2 - 1} \left(n f_n^1 + f_n^2 \right) \right\} \cos\theta$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ - \frac{(b)^2}{n} f_n^1 + \frac{\rho}{(n)^2 - 1} \left[b \left(n f_n^1 + f_n^2 \right) - \frac{P^1}{\pi} \right] \right\} \cos n\theta \qquad (57)$$

$$= H_o + H_1 \cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty} H_n \cos n\theta \qquad (57^{bis})$$

*
* * *

....

4/- APPLICATION DU THEOREME DE CASTIGLIANO

En négligeant l'effet de l'effort normal et de l'effort tranchant qui agissent sur l'anneau, l'énergie interne a pour expression:

$$U = \frac{1}{2}\rho \int_0^{2\pi} \left[\frac{(M^1)^2}{\mu J} + \frac{(M^2)^2}{EI^2} + \frac{(M^3)^2}{EI^3} \right] d\theta$$

Exprimons maintenantque la section libre C' reste confondue avec la section C (déplacement et rotation relatifs nuls):

nous devons écrire $\frac{\partial U}{\partial R_o^1} = \frac{\partial U}{\partial R_o^2} = \frac{\partial U}{\partial R_o^3} = \frac{\partial U}{\partial M_o^1} = \frac{\partial U}{\partial M_o^2} = \frac{\partial U}{\partial M_o^3} = 0$

Les équations $\frac{\partial U}{\partial R_o^2} = \frac{\partial U}{\partial R_o^3} = \frac{\partial U}{\partial M_o^1} = 0$ sont satisfaites en même temps que les équations d'équilibre déjà écrites (Equations n°s 52, 53 et 54).

L'équation $\frac{\partial U}{\partial R_o^1} = 0$

soit: $\int_0^{2\pi} \frac{\partial M^3}{\partial R_o^1} M^3 \, d\theta = 0$

donne tous calculs faits:

$$2 M_o^3 + 3 \rho R_o^1 + 3 (b)^2 f_1^1 = 3 \rho b f_o^2 + \frac{3}{4} \rho b (- f_1^1 + f_1^2) + b \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{2}{n} b f_n^1 + \rho \frac{1}{(n)^2 - 1} (n f_n^1 + f_n^2) \right] = 0 \qquad (58$$

...

L'équation $\dfrac{\partial U}{\partial M_o^2} = o$

soit $\displaystyle\int_o^{2\pi} \left(\frac{1}{\mu J}\,\frac{\partial M^1}{\partial M_o^2}\,M^1 + \frac{1}{EI^2}\,\frac{\partial M^2}{\partial M_o^2}\,M^2\right) d\theta = o$

donne tous calculs faits:

$$\frac{1}{\mu J}\left\{ -\rho P^2 + \frac{1}{4}\left[(\rho+1)P^2 + k P^1\right] + \pi\left[M_o^2 + \frac{1}{2} b\,(m_1^2 + m_1^1 + d\,f_1^1 - d\,f_1^2 - b\,f_1^3)\right.\right.$$
$$- b\,(d\,f_o^2 + b\,f_o^3 - m_o^1 - \rho\,f_1^3)$$
$$\left.\left. + b\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n)^2-1}\left[d\,(n\,f_n^1 + f_n^2) + n\,m_n^2 - m_n^1 + b\,f_n^3\right]\right]\right\}$$
$$+\frac{1}{EI^2}\left\{ -\frac{1}{4}\left[(\rho+1)P^2 + k P^1\right] + \pi\left[M_o^2 - b\,(d\,f_o^2 + b\,f_o^3 - m_o^1)\right.\right.$$
$$\left.\left. + b\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n)^2-1}\left[n\,(d\,f_n^1 + m_n^2) + d\,f_n^2 + b\,f_n^3 - m_n^1\right]\right]\right\}$$

ou:

$$\frac{1}{\mu J}\left\{ \frac{1}{4}\left[(1-3\rho)P^2 + k P^1\right] + \pi\left[M_o^2 + b\left[-d\,f_o^2 - b\,f_o^3\right.\right.\right.$$
$$+ m_o^1 + \frac{1}{2}\left\{d\,(f_1^1 - f_1^2) + (2\rho - b)\,f_1^3 + m_1^1 + m_1^2\right\}$$
$$\left.\left.\left. + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n)^2-1}\left\{d\,(n\,f_n^1 + f_n^2) + b\,f_n^3 - m_n^1 + n\,m_n^2\right\}\right]\right]\right\}$$
$$+\frac{1}{EI^2}\left\{ -\frac{1}{4}\left[(\rho+1)P^2 + k P^1\right] + \pi\left[M_o^2 + b\left[-d\,f_o^2 - b\,f_o^3 + m_o^1\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n)^2-1}\left\{d\,(n\,f_n^1 + f_n^2) + b\,f_n^3 - m_n^1 + n\,m_n^2\right\}\right]\right]\right\} = o \qquad (59)$$

soit $\dfrac{F^1}{\mu J} + \dfrac{G^1}{EI^2} = o$ $\qquad (59^{bis})$

ooo

L'équation $\dfrac{\partial U}{\partial M_o^3} = o$

soit $\displaystyle\int_o^{2\pi} \frac{\partial M^3}{\partial M_o^3} M^3 \, d\theta = o$

donne tous calculs faits:

$$M_o^3 + \rho R_o^1 + (b)^2 f_1^1 - \rho b f_o^2 + \frac{\rho P^1}{2\pi} + b \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} b f_n^1 = H_o = o \qquad (60)$$

Cette dernière équation jointe à (58) donne:

$$R_o^1 \rho + (b)^2 f_1^1 - \rho b f_o^2 - \frac{\rho P^1}{4\pi} + b\rho \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n)^2 - 1} (n f_n^1 + f_n^2) = H_1 = o \qquad (61)$$

et le moment M^3 s'écrit:

$$M^3 = \sum_{n=2}^{\infty} H_n \cos n\theta \qquad (62)$$

*
* * *

5/- CALCUL DU DEPLACEMENT ET DU PIVOTEMENT -

Nous allons utiliser les équations différentielles de la ligne moyenne rappelées ci-dessus:

L'égalité $\dfrac{1}{\rho} \dfrac{d\varphi^3}{d\theta} = \dfrac{M^3}{EI^3} = \dfrac{1}{EI^3} \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} H_n \cos n\theta$ intégrée

donne $\varphi^3 = \dfrac{\rho}{EI^3} \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\theta$ (pour $\theta = o$ $\varphi^3 = o$) (63)

....

$$\frac{du^1}{d\theta} = -\frac{(\rho)^2}{EI^3} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} H^n \sin n\theta \cos\theta$$

$$u^1 = \frac{(\rho)^2}{2\,EI^3} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{H^n}{n} \left[\frac{1}{n+1} \cos(n+1)\theta + \frac{1}{n-1} \cos(n-1)\theta \right] + K_n^1 \quad (64)$$

K_n^1 = constante d'intégration

$$\frac{du^2}{d\theta} = -\frac{(\rho)^2}{EI^3} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} H^n \sin n\theta \sin\theta$$

$$u^2 = \frac{(\rho)^2}{2\,EI^3} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} H^n \left[-\frac{1}{n-1} \sin(n-1)\theta + \frac{1}{n+1} \sin(n+1)\theta \right] + K_n^2 \quad (65)$$

avec $K_n^2 = o$ (pour $\theta = o$ $u^2 = o$)

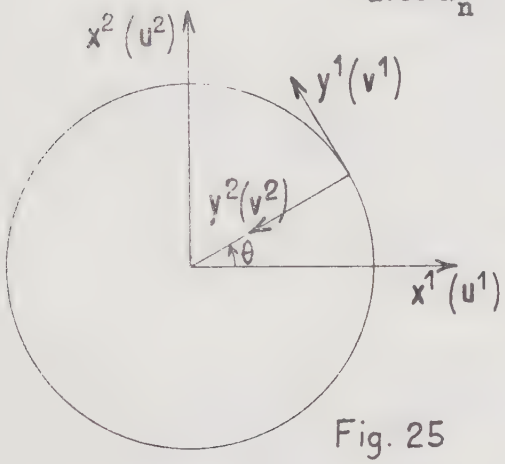


Fig. 25

Définissons le déplacement de la ligne moyenne dans le plan x^1, x^2 en se référant au système v^1, v^2, nous aurons (fig. 25)

$$v^1 = -u^1 \sin\theta + u^2 \cos\theta$$

$$v^2 = -u^1 \cos\theta - u^2 \sin\theta$$

ce qui donne:

$$v^1 = -K_n^1 \sin\theta - \frac{(\rho)^2}{EI^3} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{H_n}{n} \frac{1}{(n+1)(n-1)} \sin n\theta \quad (66)$$

$$v^2 = -K_n^1 \cos\theta - \frac{(\rho)^2}{EI^3} \sum_{n=2}^{\infty} H_n \frac{1}{(n+1)(n-1)} \cos n\theta \quad (67)$$

.....

D'autre part:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\varphi^1}{d\theta} = -\frac{1}{\mu J}\left(F^1 \sin\theta + \sum_{n=2}^{\infty} F^n \sin n\theta\right)\sin\theta - \frac{1}{EI^2}\left(G^o + G^1\cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty} G^n \cos n\theta\right)\cos\theta$$

$$\frac{d\varphi^1}{d\theta} = -\frac{\rho}{\mu J}\left(F^1 \sin^2\theta + \sum_{n=2}^{\infty} F^n \sin n\theta \sin\theta\right) - \frac{\rho}{EI^2}\left(G^o\cos\theta + G^1\cos^2\theta + \sum_{n=2}^{\infty} G^n \cos n\theta \cos\theta\right)$$

$$\varphi^1 = K^1 - \frac{\rho}{\mu J}\left\{\frac{F^1}{2}\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{F^n}{2}\left[\frac{1}{n-1}\sin(n-1)\theta - \frac{1}{n+1}\sin(n+1)\theta\right]\right\}$$

$$- \frac{\rho}{EI^2}\left\{G^o\sin\theta + \frac{G^1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta + \theta\right) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{G^n}{2}\left[\frac{1}{n+1}\sin(n+1)\theta + \frac{1}{n-1}\sin(n-1)\theta\right]\right\}$$

(K^1 = constante d'intégration)

soit :
$$\varphi^1 = K^1 - \frac{\rho}{EI^2}G^o\sin\theta + \frac{\rho}{4}\left(\frac{F^1}{\mu J} - \frac{G^1}{EI^2}\right)\sin 2\theta + \frac{\rho}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left[-\frac{1}{n-1}\left(\frac{F^n}{\mu J} + \frac{G^n}{EI^2}\right)\sin(n-1)\theta + \frac{1}{n+1}\left(\frac{F^n}{\mu J} - \frac{G^n}{EI^2}\right)\sin(n+1)\theta\right]$$

que nous écrirons:

$$\varphi^1 = K^1 - \rho\left[\frac{F^2}{2\mu J} + \frac{1}{EI^2}\left(G^o + \frac{G^2}{2}\right)\right]\sin\theta + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\rho}{2}\frac{1}{n}\left[\left(F^{n+1} + F^{n-1}\right)\frac{1}{\mu J} - \left(G^{n+1} + G^{n-1}\right)\frac{1}{EI^2}\right]\sin n\theta$$

or $K^1 = o$ nécessairement par raison de symétrie.

$$\varphi^1 = -\rho\left[\frac{F^2}{2\mu J} + \frac{1}{EI^2}\left(G^o + \frac{G^2}{2}\right)\right]\sin\theta + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\rho}{2n}\left[\left(-F^{n+1} + F^{n-1}\right)\frac{1}{\mu J} + \left(G^{n+1} + G^{n-1}\right)\frac{1}{EI^2}\right]\sin n\theta \qquad (68)$$

de même:

$$\frac{d\varphi^2}{d\theta} = \frac{\rho}{\mu J}\left(F^1\sin\theta + \sum_{n=2}^{\infty}F^n\sin n\theta\right)\cos\theta - \frac{\rho}{EI^2}\left(G^o + G^1\cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty}G^n\cos n\theta\right)\sin\theta$$

$$\varphi^2 = +K^2 + \frac{\rho}{\mu J}\left\{-\frac{1}{4}F^1\cos 2\theta + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{F^n}{2}\left[-\frac{1}{n+1}\cos(n+1)\theta - \frac{1}{n-1}\cos(n-1)\theta\right]\right\}$$

$$-\frac{\rho}{EI^2}\left\{-G^o\cos\theta - \frac{1}{4}G^1\cos 2\theta + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{G^n}{2}\left[-\frac{1}{n+1}\cos(n+1)\theta + \frac{1}{n-1}\cos(n-1)\theta\right]\right\}$$

(K^2 = constante d'intégration)

$$\varphi^2 = K^2 + \rho\left[-\frac{F^2}{2\mu J} + \frac{1}{EI^2}\left(G^o - \frac{G^2}{2}\right)\right]\cos\theta + \frac{\rho}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\mu J}\left(-F^{n-1} - F^{n+1}\right) + \frac{1}{EI^2}\left(G^{n-1} - G^{n+1}\right)\right]\cos n\theta \qquad (69)$$

Rapporté aux axes Gy^1, Gy^2, que nous utiliserons pour les déformations du voile, le pivotement est donné par (fig. 26):

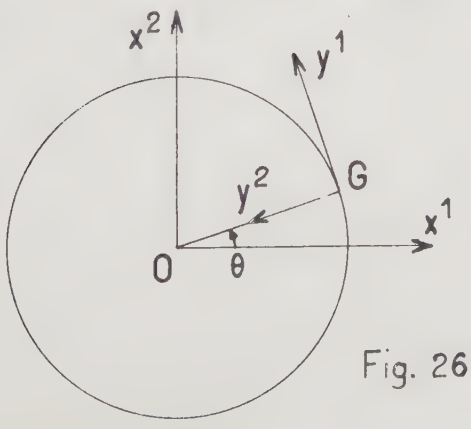


Fig. 26

$$\varphi_{y^1} = -\varphi^1\sin\theta + \varphi^2\cos\theta$$

$$\varphi_{y^2} = -\varphi^1\cos\theta - \varphi^2\sin\theta$$

et φ^3 (Equation n° 63)

...

Nous trouvons tous calculs faits:

$$\varphi_{y^1} = \frac{\rho\, G^o}{EI^2} + K^2 \cos\theta - \frac{\rho}{2}\left[\frac{F^2}{\mu J} + \frac{G^2}{EI^2}\right] \cos .2\theta + \sum_{n=2}^{\infty}\left\{\frac{\rho}{2n}\left[-\frac{F^{n-1}}{\mu J} + \frac{G^{n-1}}{EI^2}\right] \cos (n-1)\theta - \frac{\rho}{2n}\left[\frac{F^{n+1}}{\mu J} + \frac{G^{n+1}}{EI^2}\right] \cos (n+1)\theta\right\}$$

que nous pouvons écrire:

$$\varphi_{y'} = \frac{\rho\, G^o}{EI^2} + \left[K^2 + \frac{\rho}{4}\left(-\frac{F^1}{\mu J} + \frac{G^1}{EI^2}\right)\right] \cos\theta - \rho \sum_{n=2}^{\infty}\left[\left(\frac{n\,F^n}{\mu J} + \frac{G^n}{EI^2}\right) \frac{1}{(n)^2 - 1}\right] \cos\, n\theta \qquad (70)$$

De même nous avons

$$\varphi_{y2} = -K^2 \sin\theta + \frac{\rho}{2}\left[\frac{F^2}{\mu J} + \frac{G^2}{EI^2}\right] \sin 2\theta + \sum_{n=2}^{\infty}\left\{\frac{\rho}{2n}\left[\frac{F^{n+1}}{\mu J} + \frac{G^{n+1}}{EI^2}\right] \sin (n+1)\theta + \frac{\rho}{2n}\left[-\frac{F^{n-1}}{\mu J} + \frac{G^{n-1}}{EI^2}\right] \sin (n-1)\theta\right\}$$

que nous écrirons:

$$\varphi_{y2} = \left[-K^2 + \frac{\rho}{4}\left(-\frac{F^1}{\mu J} + \frac{G^1}{EI^2}\right)\right] \sin\theta + \rho \sum_{n=2}^{\infty}\left[\left(\frac{F^n}{\mu J} + \frac{n\,G^n}{EI^2}\right) \frac{1}{(n)^2 - 1}\right] \sin\, n\theta \qquad (71)$$

Enfin nous avons:

$$\frac{1}{\rho}\ \frac{du^3}{d\theta} = \varphi^1 \cos\theta + \varphi^2 \sin\theta$$

$$\frac{1}{\rho}\ \frac{du^3}{d\theta} = -\varphi_{y^2}$$

$$\frac{du^3}{d\theta} = \rho\left[K^2 + \frac{\rho}{4}\left(\frac{F^1}{\mu J} - \frac{G^1}{EI^2}\right)\right]\sin\theta - (\rho)^2 \sum_{n=2}^{\infty}\left[\left(\frac{F^n}{\mu J} + \frac{n\,G^n}{EI^2}\right)\ \frac{1}{(n)^2-1}\right]\sin\ n\theta$$

$$u^3 = K^3 + \rho\left[-K^2 + \frac{\rho}{4}\left(-\frac{F^1}{\mu J} + \frac{G^1}{EI^2}\right)\right]\cos\theta + (\rho)^2 \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{n}\left(\frac{F^n}{\mu J} + \frac{n\,G^n}{EI^2}\right)\ \frac{1}{(n)^2-1}\right]\cos\ n\theta \qquad (72)$$

(K^3 = constante d'intégration)

Cette dernière équation jointe à celles donnant v^1 et v^2 (équations n°s 66 et 67) détermine le déplacement du point G.

°°°

CHAPITRE II

DEFORMATION D'UN VOILE PLAN SOUS L'ACTION D'UNE FORCE LOCALISEE APPLIQUEE SUR LA PERIPHERIE DE LA ROUE

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, la force localisée a pour effet de soumettre le périmètre extérieur du voile (r = b) aux forces et moments (fig. 27 et 28):

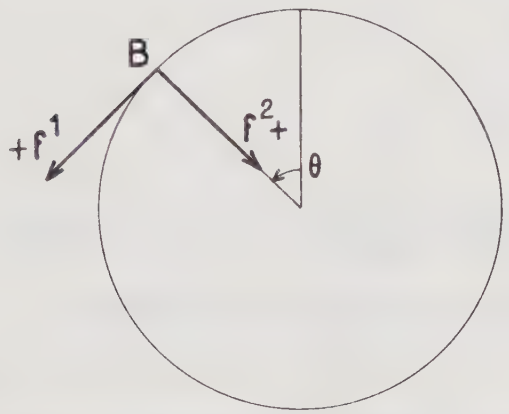


Fig. 27

$$f^1 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^1 \sin n\theta \qquad (40)$$

$$f^2 = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^2 \cos n\theta \qquad (41)$$

$$f^3 = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^3 \cos n\theta \qquad (42)$$

$$m^1 = \sum_{n=0}^{\infty} m_n^1 \cos n\theta \qquad (43)$$

$$m^2 = \sum_{n=1}^{\infty} m_n^2 \sin n\theta \qquad (44)$$

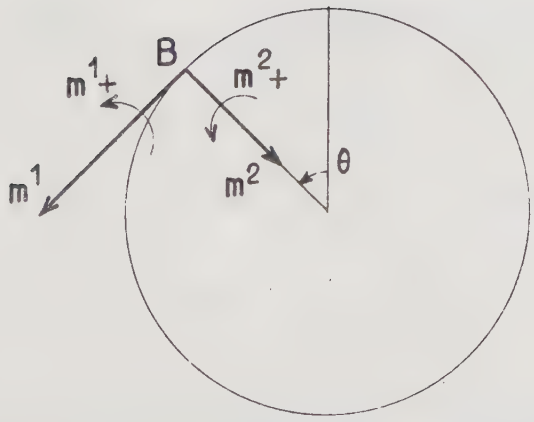


Fig. 28

D'autre part, le périmètre intérieur du voile (r = a) est considéré comme encastré dans le moyeu.

Le voile se déforme:

1°- par flexion sous l'action des moments m^1 et m^2 et de la force f^3

2°- par contraction sous l'action des forces f^1 et f^2.

...

1°- DEFORMATION PAR FLEXION D'UNE PLAQUE PLANE (RAPPEL)

Nous utiliserons les coordonnées polaires et nous prenons le plan moyen de la plaque avant déformation comme plan des x^1 x^2 et des r θ . La direction Ox^3 complète le trièdre de référence.

Appelons w^3 la déformation de chaque point de la plaque suivant une perpendiculaire au plan x^1 x^2.

La plaque est soumise:

- aux moments de flexion M_r M_t
- au moment de torsion M_{rt}
- aux efforts tranchants Q_t Q_r.

Si nous admettons que:

1°- la déformation w^3 est petite devant l'épaisseur h de la plaque

2°- les allongements du plan moyen de la plaque sont négligeables

3°- l'effet des efforts tranchants sur la déformation est négligeable (hypothèse valable si l'épaisseur h est petite devant les autres dimensions de la plaque)

nous aurons l'équation différentielle de la flexion $\Delta\Delta w^3 = o$ Δ étant le Laplacien en coordonnées polaires.

....

Les moments et les efforts tranchants étant donnés par (fig. 29 et 30):

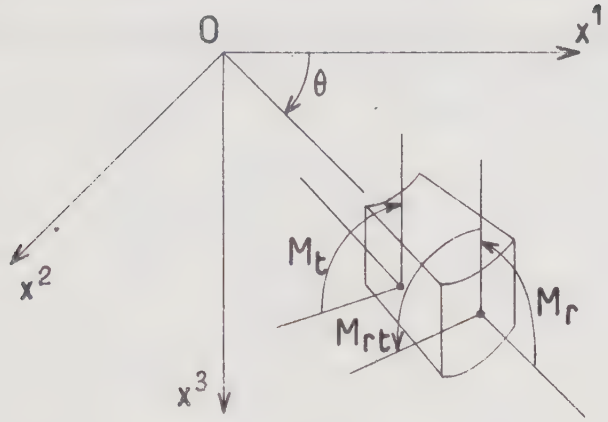


Fig. 29

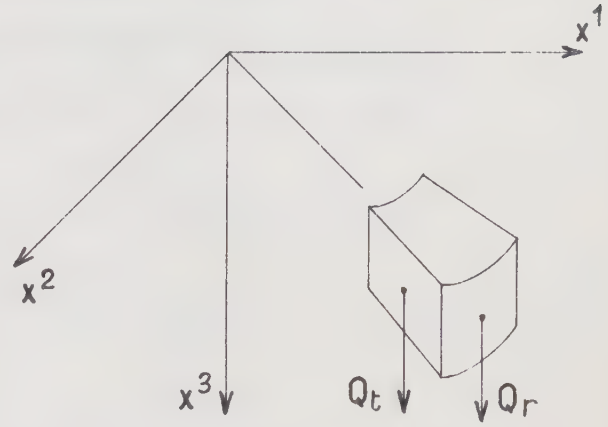


Fig. 30

$$M_r = -K\left[\frac{\partial^2 w^3}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w^3}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w^3}{\partial \theta^2}\right)\right] \tag{73}$$

$$M_t = -K\left[\frac{1}{r}\frac{\partial w^3}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w^3}{\partial \theta^2} + \nu\frac{\partial^2 w^3}{\partial r^2}\right] \tag{74}$$

$$M_{rt} = (1-\nu)K\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w^3}{\partial r\,\partial\theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial w^3}{\partial \theta}\right] \tag{75}$$

$$Q_r = -K\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial^2 w^3}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w^3}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w^3}{\partial \theta^2}\right] \tag{76}$$

$$Q_t = -K\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{\partial^2 w^3}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w^3}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w^3}{\partial \theta^2}\right] \tag{77}$$

Résolution de l'équation différentielle $\Delta\Delta\, w^3 = 0$

La solution générale de cette équation peut s'écrire (1):

$$w^3 = R_o + \sum_{n=1}^{\infty} R_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} R'_n \sin n\theta \tag{78}$$

ou R_o R_n et R'_n ne sont fonction que de la distance radiale r.

...

(1)- Solution donnée par A. CLEBSCH dans "Théorie der Elasticität fester Körper. Timoshenko: Théorie des plaques et coques - page 246.

Si nous prenons l'axe Ox^1 dans le plan médian passant par le point A, point d'application de la force localisée, nous aurons nécessairement pour la flèche w^3 une fonction paire: les $R_n^!$ sont nuls et l'on trouve:

$$R_o = A_o + B_o (r)^2 + C_o \ln /\frac{r}{b}/ + D_o (r)^2 \ln /\frac{r}{b}/ \quad (79$$

$$R_1 = A_1 r + B_1 (r)^3 + C_1 (r)^{-1} + D_1 r \ln /\frac{r}{b}/ \quad (80$$

$$R_n = A_n (r)^n + B_n (r)^{-n} + C_n (r)^{n+2} + D_n (r)^{-n+2} \quad (81$$

où A_o B_o C_o D_o A_1 B_1 C_1 D_1 A_n B_n C_n et D_n sont des constantes.

De l'expression ainsi trouvée de la flèche w^3 nous déduirons :

$$Q_r = K \left\{ -\frac{4 D_o}{r} + \cos\theta \left[2 \frac{D_1}{(r)^2} - 8 B_1 \right] + \sum_{n=2}^{\infty} \cos n\theta \left[-4 n (n+1) C_n (r)^{n-1} - 4 n (n-1) D_n (r)^{-n-1} \right] \right\} \quad (82$$

$$M_r = -K \left\{ 2 B_o (1+\nu) + \frac{C_o}{(r)^2} (-1+\nu) + 2 D_o \ln /\frac{r}{b}/ (1+\nu) + D_o (3+\nu) \right.$$
$$+ \cos\theta \left[2 B_1 r (3+\nu) + 2 \frac{C_1}{(r)^3} (1-\nu) + \frac{D_1}{r} (1+\nu) \right]$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \cos n\theta \left[n (n-1) (1-\nu) A_n (r)^{n-2} + n (n+1) (1-\nu) B_n (r)^{-n} \right.$$
$$+ (n+1) \left[n (1-\nu) + 2 (1+\nu) \right] C_n (r)^n$$
$$\left. \left. + (n-1) \left[n (1-\nu) - 2 (1-\nu) \right] D_n (r)^{-n} \right] \right\} \quad (83$$

...

$$M_t = -K \left\{ 2 B_o (1+\nu) + \frac{C_o}{(r)^2}(1-\nu) + 2 D_o (1+\nu) \ln \left/\frac{r}{b}\right/ + D_o (1+3\nu) \right.$$
$$+ \cos\theta \left[2 B_1 r (1+3\nu) + 2 \frac{C_1}{(r)^3}(-1+\nu) + \frac{D_1}{r}(1+\nu) \right]$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty} + \cos n\theta \left[n(n-1)(-1+\nu) A_n (r)^{n-2} + n(n+1)(-1+\nu) B_n (r)^{-n-2} \right.$$
$$+ (n-1)\left[n(-1+\nu) + 2(1+\nu) \right] C_n (r)^n$$
$$\left. \left. + (-n+1)\left[n(1-\nu) + 2(1+\nu) \right] D_n (r)^{-n} \right] \right\} \qquad (84)$$

$$M_{rt} = (1-\nu) K \left\{ \sin\theta \left[-2 B_1 r + 2 \frac{C_1}{(r)^3} - \frac{D_1}{r} \right] \right.$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \sin n\theta \left[n(-n+1) A_n (r)^{n-2} + n(n+1) B_n (r)^{-n-2} \right.$$
$$\left. \left. - n(n+1) C_n (r)^n + n(n-1) D_n (r)^{-n} \right] \right\} \qquad (85)$$

et les contraintes à la surface du voile valent:

$$\sigma_r = \pm \frac{6 M_r}{(h)^2} \qquad \sigma_t = \pm \frac{6 M_t}{(h)^2} \qquad (86)$$

.....

2°- DEFORMATION ET CONTRAINTES D'UNE PLAQUE ANNULAIRE D'EPAISSEUR CONSTANTE SOUMISE A DES FORCES RADIALES f^2 ET TANGENTIELLES f^1 APPLIQUEES SUR LA PERIPHERIE EXTERIEURE ET ENCASTREE SUIVANT SON PERIMETRE INTERIEUR

Nous prendrons évidemment l'axe de symétrie des déformations et des contraintes comme axe d'origine des coordonnées polaires que nous allons utiliser.

Nous aurons à la périphérie du voile:

$$(\sigma_r)_{r=b} = -\frac{f_o^2}{h} - \frac{f_1^2}{h}\cos\theta - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{f_n^2}{h}\cos n\theta \qquad (8$$

$$(\tau_{rt})_{r=b} = \frac{f_1^1}{h}\sin\theta + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{f_n^1}{h}\sin n\theta \qquad (8$$

Nous pouvons, d'autre part, écrire que les contraintes ont pour valeur:

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial r} + \frac{1}{(r)^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial\theta^2} \qquad (8$$

$$\sigma_t = \frac{\partial^2\chi}{\partial r^2} \qquad (9$$

$$\tau_{rt} = \frac{1}{(r)^2}\frac{\partial\chi}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\chi}{\partial r\,\partial\theta} \qquad (9$$

où χ est la fonction de tension ayant pour expression (1):

$$a_o \ln/r/ + b_o (r)^2 + c_o (r)^2 \ln/r/ + d_o (r)^2\theta + a_o^{'}\theta$$
$$+ \frac{a_1}{2} r\theta\sin\theta + (b_1 (r)^3 + a_1^{'}(r)^{-1} + b_1^{'} r \ln/r/)\cos\theta$$
$$- \frac{c_1}{2} r\theta\cos\theta + (d_1 (r)^3 + c_1^{'}(r)^{-1} + d_1^{'} r \ln/r/)\sin\theta$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty}(a_n (r)^n + b_n (r)^{n+2} + a_n^{'}(r)^{-n} + b_n^{'}(r)^{-n+2})\cos n\theta$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty}(c_n (r)^n + d_n (r)^{n+2} + c_n^{'}(r)^{-n} + d_n^{'}(r)^{-n+2})\sin n\theta \qquad (9$$

où a_o b_o c_o d_o $a_o^{'}$ $a_1^{'}$ $b_1^{'}$ $a_1^{'}$ etc.. sont des constantes.

...

(1)- Timoshenko: Théorie de l'Elasticité - page 120.

Les allongements unitaires ont pour expression:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} \left(\sigma_r - \nu \sigma_t \right) \tag{93}$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} \left(\sigma_t - \nu \sigma_r \right) \tag{94}$$

Le glissement est:

$$\gamma_{rt} = \frac{1}{\mu} \tau_{rt} \tag{95}$$

Enfin nous avons:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial w^2}{\partial r} \tag{96}$$

$$\varepsilon_t = \frac{w^2}{r} + \frac{\partial w^1}{r \partial \theta} \tag{97}$$

$$\gamma_{rt} = \frac{\partial w^2}{r \partial \theta} + \frac{\partial w^1}{\partial r} - \frac{w^1}{r} \tag{98}$$

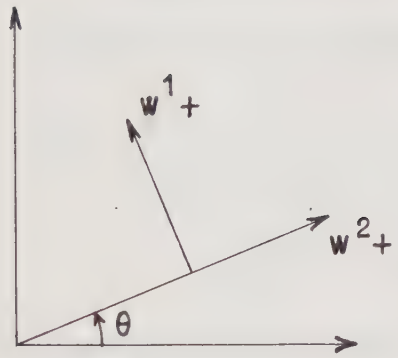


Fig. 31

w^2 et w^1 étant les composantes du déplacement suivant le rayon et suivant la normale au rayon au point considéré (fig. 31).

Pour faciliter le calcul, nous allons considérer la fonction χ comme la somme des fonctions χ_o χ_1 χ_n

où χ_o est le terme non trigométrique

χ_1 le terme en $\sin\theta$ et $\cos\theta$

χ_n le terme en $\sin n\theta$ et $\cos n\theta$

Le déplacement et les contraintes seront la somme des déplacements et des contraintes donnés pour chacune des fonctions χ .

...

Etude de X_o

Nous avons:

$$\sigma_r = a_o (r)^{-2} + 2 b_o + 2 c_o \ln /r/ + c_o + 2 d_o \theta$$

$$\sigma_t = - a_o (r)^{-2} + 2 b_o + 2 c_o \ln /r/ + 3 c_o + 2 d_o \theta$$

$$\tau_{rt} = a_o' (r)^{-2} - d_o$$

σ_r est nécessairement une fonction paire donc $d_o = o$.

Les conditions sur le périmètre extérieur où $r = b$ donnent:

$$(\sigma_r)_{r=b} = a_o (b)^{-2} + 2 b_o + 2 c_o \ln /b/ + c_o = - \frac{f_o^2}{h} \quad (1)$$

$$(\tau_{rt})_{r=b} = a_o' (b)^{-2} = o \quad (1)$$

$$a_o' = o \quad \text{et} \quad \tau_{rt} = o \quad (1)$$

Calculons les déplacements:

$$\frac{\delta w^2}{\delta t} = \varepsilon_r = \frac{1}{E} \left[a_o (r)^{-2} + 2 b_o + 2 c_o \ln /r/ + c_o + \nu a_o (r)^{-2} - 2 b_o \nu - 2 c_o \nu \ln /r/ - 3 \nu c_o \right]$$

$$w^2 = \frac{1}{E} \left[- a_o (r)^{-1} (1 + \nu) + 2 b_o r (1 - \nu) + 2 c_o (1 - \nu) r \ln /r/ - c_o r (1 + \nu) \right] + g(\theta)$$

où $g(\theta)$ est fonction de la seule variable θ

$$\frac{\partial w^1}{\partial \theta} = \frac{r}{E} (\sigma_t - \nu \sigma_r) - w^2$$

soit $$\frac{\partial w^1}{\partial \theta} = \frac{1}{E} 4 c_o r - g (\theta)$$

$$w^1 = \frac{1}{E} 4 c_o r\theta - \int g (\theta) d\theta + g_1 (r)$$

où $g_1 (r)$ est fonction de la seule variable r. Or w^1 doit conserver la même valeur si θ devient $\theta + 2\pi$ ce qui impose $c_o = o$

Ainsi nous avons:

$$w^2 = \frac{1}{E} [- a_o (r)^{-1} (1 + \nu) + 2 b_o r (1 - \nu)] + g (\theta)$$

$$w^1 = - \int g (\theta) d\theta + g_1 (r)$$

l'égalité (99) s'écrit:

$$a_o (b)^{-2} + 2 b_o = - \frac{f_o^2}{h} \qquad (102)$$

et l'équation (101) devient:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial g (\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial g_1 (r)}{\partial r} - \frac{1}{r} \left[- \int g (\theta) d\theta + g_1 (r) \right] = o$$

dont la solution générale est:

$$g (\theta) = A^o \sin\theta + B^o \cos\theta$$

$$g_1 (r) = C^o r$$

A^o B^o et C^o étant des constantes.

La fonction g est nécessairement une fonction paire donc $A^o = o$ et

$$w^2 = \frac{1}{E} \left[- a_o (r)^{-1} (1 + \nu) + 2 b_o r (1 - \nu) \right] + B^o \cos \theta$$

$$w^1 = - B^o \sin \theta + C^o r$$

ooo

Les conditions d'encastrement pour $r = a$ s'écrivent:

$$- a_o (a)^{-1} (1 + \nu) + 2 b_o a (1 - \nu) = o \qquad (10$$

$$B^o = o$$

$$C^o = o$$

donc $g(\theta) \equiv o$ et $g_1(r) \equiv o$

Les égalités (105) et (106) déterminent les constantes:

$$a_o = - \frac{f_o^2}{h} \frac{1 - \nu}{(1 - \nu)(b)^{-2} + (1 + \nu)(a)^{-2}} \qquad (104$$

$$b_o = - \frac{1}{2} \frac{f_o^2}{h} \frac{(1 + \nu)(a)^{-2}}{(1 - \nu)(b)^{-2} + (1 + \nu)(a)^{-2}} \qquad (105$$

et le déplacement est défini par:

$$w^2 = \frac{1}{E} \left[- a_o (r)^{-1} (1 + \nu) + 2 b_o r (1 - \nu) \right]$$

$$w^1 = o \qquad (106$$

soit $$w^2 = \frac{1}{E} \cdot \frac{f_o^2}{h} \cdot \frac{(1 - \nu)(1 + \nu)}{(1 - \nu)(b)^{-2} + (1 + \nu)(a)^{-2}} \left[(r)^{-1} - (a)^{-2} r \right] \qquad (107$$

Etude de X_1

Nous trouvons:

$$\sigma_r = (2 b_1 r - 2 a_1' (r)^{-3} + b_1' (r)^{-1} + a_1 (r)^{-1}) \cos\theta$$

$$+ (2 d_1 r - 2 c_1' (r)^{-3} + d_1' (r)^{-1} + c_1 (r)^{-1}) \sin\theta$$

....

$$\sigma_t = (6\, b_1\, r + 2\, a_1^{*}\, (r)^{-3} + b_1^{*}\, (r)^{-1}) \cos\theta$$
$$+ (6\, d_1\, r + 2\, c_1^{*}\, (r)^{-3} + d_1^{*}\, (r)^{-1}) \sin\theta$$

$$\tau_{rt} = (2\, b_1\, r - 2\, a_1^{*}\, (r)^{-3} + b_1^{*}\, (r)^{-1}) \sin\theta$$
$$+ (-2\, d_1\, r + 2\, c_1^{*}\, (r)^{-3} - d_1^{*}\, (r)^{-1}) \cos\theta$$

σ_r et σ_t sont nécessairement des fonctions paires.

τ_{rt} une fonction impaire, donc:

$$\underline{\underline{d_1 = 0}} \quad \underline{\underline{c_1^{*} = 0}} \quad \underline{\underline{d_1^{*} = 0}} \quad \underline{\underline{c_1 = 0}}$$

Les conditions sur le périmètre extérieur où r = b donnent:

$$(\sigma_r)_{r=b} = 2\, b_1\, b - 2\, a_1'\, (b)^{-3} + b_1'\, (b)^{-1} + a_1\, (b)^{-1} = -\frac{f_1^2}{h} \qquad (108)$$

$$(\tau_{rt})_{r=b} = 2\, b_1\, b - 2\, a_1^{*}\, (b)^{-3} + b_1^{*}\, (b)^{-1} = \frac{f_1^1}{h} \qquad (109)$$

d'où nous tirons $a_1 = -\frac{b}{h}(f_1^1 + f_1^2)$ (110)

Après un calcul identique à celui que nous avons fait précédemment, nous trouvons:

$$w^2 = \frac{1}{E}\Big[\, b_1\, (r)^2\, (1 - 3\nu) + a_1^{*}\, (r)^{-2}\, (1 + \nu) + b_1^{*}\, (1 - \nu)\, \ln |r| + a_1 \ln |r| \,\Big] \cos\theta$$
$$+ \frac{1}{E}\left[2\, b_1^{*} + \frac{(1 - \nu)}{2}\, a_1 \right] \theta \sin\theta + A^1 \sin\theta + B^1 \cos\theta$$

....

$$w^1 = \frac{1}{E}\left[- a_1 \frac{(1+\nu)}{2} - a_1 \ln /r/ + b_1 (r)^2 (5+\nu) + a_1^* (r)^{-2} (1+\nu) - b_1^* (1+\nu) \right.$$
$$\left. - b_1^* (1-\nu) \ln /r/ \right] \sin\theta$$
$$+ \frac{1}{E}\left[\frac{(1-\nu)}{2} a_1 + b_1^* \right] \theta \cos\theta - B^1 \sin\theta + A^1 \cos\theta + C^1 r$$

où A^1 B^1 et C^1 sont des constantes

or w^1 et w^2 doivent conserver la même valeur si θ devient $\theta + 2\pi$ ce qui impose:

$$2 b_1^* + \frac{(1-\nu)}{2} a_1 = o$$

soit $$b_1^* = - \frac{(1-\nu) a_1}{4} \qquad (111)$$

D'autre part la fonction w^2 est nécessairement une fonction paire, w^1 impaire, donc $\underline{\underline{A^1 = o}}$

Enfin, les conditions d'encastrement pour $r = a$ s'écrivent:

$$b_1 (a)^2 (1-3\nu) + a_1^* (a)^{-2} (1+\nu) + b_1^* (1-\nu) \ln /a/ + a_1 \ln /a/ + B^1 = o \qquad (112)$$

$$- a_1 \frac{(1+\nu)}{2} - a_1 \ln /a/ + b_1 (a)^2 (5+\nu) + a_1^* (a)^{-2} (1+\nu) - b_1^* (1+\nu)$$
$$- b_1^* (1-\nu) \ln /a/ - B^1 = o \qquad (113)$$

$$\underline{\underline{C^1 = o}}$$

Les égalités (109), (110), (111), (112) et (113) déterminent les constantes introduites (a_1, b_1, a_1^*, b_1^* et B^1).

Le déplacement étant défini par:

$$w^2 = \left\{ \frac{1}{E}\left[b_1 (r)^2 (1-3\nu) + a_1^* (r)^{-2} (1+\nu) + b_1^* (1-\nu) \ln /r/ \right.\right.$$
$$\left.\left. + a_1 \ln /r/ \right] + B^1 \right\} \cos\theta \qquad (114)$$

...

$$w^1 = \left\{ \frac{1}{E}\left[- a_1 \frac{(1+\nu)}{2} - a_1 \ln /r/ + b_1 (r)^2 (5+\nu) + a_1^* (r)^{-2} (1+\nu) \right.\right.$$
$$\left.\left. - b_1^* (1+\nu) - b_1^* (1-\nu) \ln /r/ \right] - B^1 \right\} \sin\theta \qquad (115)$$

Etude de χ_n

La symétrie des contraintes par rapport à l'axe origine des coordonnées nous oblige à ne conserver que le terme du cos n θ .

Ainsi nous aurons:

$$\sigma_r = \left\{ a_n (r)^{n-2} (-n+1) n + b_n (r)^n (n+1) (-n+2) - a_n^* (r)^{-n-2} (n+1) n \right.$$
$$\left. - b_n^* (r)^{-n} (n-1) (n+2) \right\} \cos n\theta$$

$$\sigma_t = \left\{ a_n (r)^{n-2} (n-1) n + b_n (r)^n (n+2) (n+1) + a_n^* (r)^{-n-2} n (n+1) \right.$$
$$\left. + b_n^* (r)^{-n} (n-2) (n-1) \right\} \cos n\theta$$

$$\tau_{rt} = n \left\{ a_n (r)^{n-2} (n-1) + b_n (r)^n (n+1) - a_n^* (r)^{-n-2} (n+1) \right.$$
$$\left. + b_n^* (r)^{-n} (-n+1) \right\} \sin n\theta$$

Les conditions sur le périmètre extérieur où r = b donnent:

$$(\sigma_r)_{r=b} = a_n (b)^{n-2} (-n+1) n + b_n (b)^n (n+1) (-n+2)$$
$$- a_n^* (b)^{-n-2} (n+1) n - b_n^* (b)^{-n} (n-1) (n+2) = - \frac{f_n^2}{h} \qquad (116)$$

$$(\tau_{rt})_{r=b} = n \left\{ a_n (b)^{n-2} (n-1) + b_n (b)^n (n+1) - a_n^* (b)^{-n-2} (n+1) \right.$$
$$\left. - b_n^* (b)^{-n} (n-1) \right\} = \frac{f_n^1}{h} \qquad (117)$$

....

Après un calcul identique à ceux que nous avons faits précédemment, nous trouvons:

$$w^2 = \frac{1}{E}\left\{ - a_n (r)^{n-1} n (1+\nu) + b_n (r)^{n+1}\left[- n + 2 - \nu(n+2)\right] + a'_n (r)^{-n-1} n (1+\nu) + b'_n (r)^{-n+1}\left[n+2+\nu(n-2)\right]\right\} \cos n\theta + A^n \sin\theta + B^n \cos\theta$$

$$w^1 = \frac{1}{E}\left\{ a_n (r)^{n-1} (1+\nu) n + b_n (r)^{n+1} (n+4+\nu n) + a'_n (r)^{-n-1} (1+n) n + b'_n (r)^{-n+1} (n-4+\nu n)\right\} \sin n\theta - B^n \sin\theta + A^n \cos\theta + C^n r$$

où A^n B^n et C^n sont des constantes.

La fonction w^2 est nécessairement une fonction paire, w^1 impaire, donc $\underline{\underline{A^n = o}}$.

Enfin, les conditions d'encastrement pour $r = a$ s'écrivent:

$$- a_n (a)^{n-1} n (1+\nu) + b_n (a)^{n+1}\left[- n + 2 - \nu(n+2)\right] + a'_n (a)^{-n-1} n (1+\nu) + b'_n (a)^{-n+1}\left[n+2+\nu(n-2)\right] = o \qquad (118)$$

$$B^n = o \qquad (119)$$

$$a_n (a)^{n-1} n (1+\nu) + b_n (a)^{n+1} (n+4+\nu n) + a'_n (a)^{-n-1} n (1+\nu) + b'_n (a)^{-n+1} (n-4-\nu n) = o \qquad (120)$$

$$C^n = o \qquad (121)$$

Les 4 égalités (116) (117) (118) et (120) déterminent les constantes a_n b_n a'_n et b'_n.

*
* *

...

Ainsi les composantes w^1 et w^2 du déplacement d'un point courant du voile ont pour expression:

$$w^1 = \left\{ \frac{1}{E} \left[- a_1 \frac{1+\nu}{2} - a_1 \ln /r/ + b_1 (r)^2 (5+\nu) + a_1^* (r)^{-2} (1+\nu) \right.\right.$$
$$\left.\left. - b_1^* (1+\nu) - b_1^* (1-\nu) \ln /r/ \right] - B^1 \right\} \sin\theta$$
$$+ \frac{1}{E} \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ a_n (r)^{n-1} n (1+\nu) + b_n (r)^{n+1} (n+4+\nu n) \right.$$
$$\left. + a_n^* (r)^{-n-1} n (1+\nu) + b_n^* (r)^{-n+1} (n-4+\nu n) \right\} \sin n\theta \qquad (122)$$

$$w^2 = \frac{1}{E} \cdot \frac{f_o^2}{h} \cdot \frac{(1-\nu)(1+\nu)}{(1-\nu)(b)^{-2} + (1+\nu)(a)^{-2}} \left[(r)^{-1} - (a)^{-2} r \right]$$
$$+ \left\{ \frac{1}{E} \left[b_1 (r)^2 (1-3\nu) + a_1^* (r)^{-2} (1+\nu) \right.\right.$$
$$\left.\left. + b_1^* (1-\nu) \ln /r/ + a_1 \ln /r/ \right] + B^1 \right\} \cos\theta$$
$$+ \frac{1}{E} \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ - a_n (r)^{n-1} n (1+\nu) + b_n (r)^{n+1} \left[-n+2-\nu(n+2) \right] \right.$$
$$\left. + a_n^* (r)^{-n-1} n (1+\nu) + b_n^* (r)^{-n+1} \left[n+2+\nu(n-2) \right] \right\} \cos n$$
$$(123)$$

...

CHAPITRE III

DEFORMATIONS ET CONTRAINTES DANS UN VOILE DE ROUE

SOUMISE A UNE FORCE LOCALISEE

APPLIQUEE SUR LA PERIPHERIE DU BANDAGE

RESOLUTION

La détermination des déformations et des contraintes du voile se fera en exprimant, d'une part, que le voile est encastré dans le moyeu, d'autre part, en identifiant les déformations et les sollicitations subies par la périphérie extérieure du voile avec celles du périmètre intérieur de l'ensemble bandage-jante.

Nous aurons ainsi:

- pour l'encastrement:

$$(w^3)_{r=a} = o \qquad (78)$$

$$\left(\frac{\partial w^3}{\partial r}\right)_{r=a} = o \qquad (78)$$

- pour les déformations périphériques du voile:

$$(w^3)_{r=b} = u^3 + \varphi_y^1 \cdot e \qquad (78,72,70$$

$$\left(\frac{\partial w^3}{\partial r}\right)_{r=b} = - \varphi_y^1 \qquad (78,70$$

$$\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial w^3}{\partial \theta}\right)_{r=b} = - \varphi_y^2 \qquad (78,71$$

$$(w^1)_{r=b} = v^1 \qquad (122,6$$

$$(w^2)_{r=b} = - v^2 \qquad (123,6$$

(En ne tenant pas compte du pivotement de la jante).

..

- pour les moments et force agissant sur le bord du voile:

$$(M_r)_{r=b} = m^1 \tag{83}$$

$$(M_{rt})_{r=b} = -m^2 \tag{85}$$

$$(Q_r)_{r=b} = f^3 \tag{82}$$

Notons que ces dix égalités doivent être valables quelle que soit la valeur de l'angle θ . Elles nous donneront ainsi une série d'égalités pour les termes d'indice o, d'indice 1 et d'indice n. Savoir:

Termes d'indice o -

$$A_o + B_o (a)^2 + C_o \ln \left/\frac{a}{b}\right/ + D_o (a)^2 \ln \left/\frac{a}{b}\right/ = o \tag{124}$$

$$2 B_o a + \frac{C_o}{a} + 2 D_o a \ln \left/\frac{a}{b}\right/ + D_o a = o \tag{125}$$

$$A_o + B_o (b)^2 = K^3 \tag{126}$$

$$2 B_o b + \frac{C_o}{b} + D_o b = -\rho \frac{G_o}{EI^2} = -\frac{\rho}{EI^2} \left\{ b \left[d f_o^2 + b f_o^3 - m_o^1 \right] - \frac{1}{2\pi} \left[(\rho + 1) P^2 + k P^1 \right] \right\} \tag{127}$$

$$\frac{1}{E} \cdot \frac{f_o^2}{h} \cdot \frac{(1-\nu)(1+\nu)}{(1-\nu)(b)^{-2} + (1+\nu)(a)^{-2}} \left[\frac{1}{b} - \frac{b}{(a)^2} \right] = o$$

ce qui donne $f_o^2 = o$ (128)

$$-K \left\{ 2 B_o (1+\nu) + \frac{C_o}{(b)^2} (-1+\nu) + D_o (3+\nu) \right\} = m_o^1 \tag{129}$$

$$-\frac{4 D_o}{b} K = f_o^3 \tag{130}$$

à ces égalités, nous ajouterons l'équation d'équilibre:

$$2\pi b f_o^3 = P^2 \tag{53}$$

Nous avons ainsi 8 égalités pour déterminer les 7 valeurs inconnues d'indice o et la constante K^3 .

Termes d'indice 1 -

$$A_1 a + B_1 (a)^3 + \frac{C_1}{a} + D_1 a \ln /\frac{a}{b}/ = o \qquad (131)$$

$$A_1 + 3 B_1 (a)^2 - \frac{C_1}{(a)^2} + D_1 \ln /\frac{a}{b}/ + D_1 = o \qquad (132)$$

$$A_1 b + B_1 (b)^3 + \frac{C_1}{b} = - b K^2 + \frac{\rho}{4} (\rho + e) \left[- \frac{F^1}{\mu J} + \frac{G^1}{EI^2} \right] \qquad (133)$$

$$A_1 + 3 B_1 (b)^2 - \frac{C_1}{(b)^2} + D_1 = - \left[K^2 + \frac{\rho}{4} \left[- \frac{F^1}{\mu J} + \frac{G^1}{EI^2} \right] \right] \qquad (134)$$

L'égalité des pivotements φ_y^2 donne une équation identique à celle donnée par les déplacements u^3.

$$\frac{1}{E} \left[b_1 (b)^2 (1 - 3 \nu) + a_1^* (b)^{-2} (1 + \nu) + b_1^* (1 - \nu) \ln /b/ + a_1 \ln /b/ \right] + B^1 = K_n^1 \qquad (135)$$

$$\frac{1}{E} \left[- a_1 \frac{(1 + \nu)}{2} - a_1 \ln /b/ + b_1 (b)^2 (5 + \nu) + a_1^* (b)^{-2} (1 + \nu) - b_1^* (1 + \nu) - b_1^* (1 - \nu) \ln /b/ \right] - B^1 = - K_n^1 \qquad (136)$$

$$- K \left\{ 2 B_1 b (3 + \nu) + 2 \frac{C_1}{(b)^3} (1 - \nu) + \frac{D_1}{b} (1 + \nu) \right\} = m_1^1 \qquad (137)$$

$$(1 - \nu) K \left\{ - 2 B_1 b + 2 \frac{C_1}{(b)^3} - \frac{D_1}{b} \right\} = - m_1^2 \qquad (138)$$

$$K \left\{ 2 \frac{D_1}{(b)^2} - 8 B_1 \right\} = f_1^3 \qquad (139)$$

...

A ces équations nous ajouterons, d'une part, les équations d'équilibre:

$$f_1^1 + f_1^2 = \frac{P^1}{\pi\, b} \tag{52}$$

$$m_1^2 - m_1^1 + b\, f_1^3 = \frac{1}{\pi b}\left[(b + e + 1)\, P^2 + (k - d)\, P^1 \right] \tag{54}$$

d'autre part, l'équation obtenue par le Théorème de Castigliano pour la déterminatio du terme M_o^2 (Equation 59 : $\frac{F^1}{\mu\, J} + \frac{G^1}{EI^2} = o$) soit:

$$\frac{1}{\mu J}\left\{ \frac{1}{4}\left[(1 - 3\rho)\, P^2 + k\, P^1 \right] + \pi\left[M_o^2 + b\left[- d\, f_o^2 - b\, f_o^3 \right.\right.\right.$$

$$\left. + m_o^1 + \frac{1}{2}\left\{ d\,(f_1^1 - f_1^2) + (2\rho - b)\, f_1^3 + m_1^1 + m_1^2 \right\} \right.$$

$$\left.\left. + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n)^2 - 1}\left\{ d\,(n\, f_n^1 + f_n^2) + b\, f_n^3 - m_n^1 + n\, m_n^2 \right\}\right]\right\}$$

$$+ \frac{1}{EI^2}\left\{ - \frac{1}{4}\left[(\rho + 1)\, P^2 + k\, P^1 \right] + \pi\left[M_o^2 + b\left[- d\, f_o^2 - b\, f_o^3 + m_o^1 \right.\right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n)^2 - 1}\left\{ d\,(n\, f_n^1 + f_n^2) + b\, f_n^3 - m_n^1 + n\, m_n^2 \right\}\right]\right\} = o$$

nous permet de calculer la valeur de l'expression:

$$M_o^2 + b \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n)^2 - 1}\left[d\,(n\, f_n^1 + f_n^2) + b\, f_n^3 - m_n^1 + n\, m_n^2 \right]$$

Elle vaut:

$$- \frac{1}{4\pi}\left\{ (\rho + 1)\, P^2 + k\, P^1 \right\} \frac{EI^2 - \mu J}{EI^2 + \mu J} + b\,(d\, f_o^2 + b\, f_o^3 - m_o^1)$$

$$+ \frac{EI^2}{EI^2 + \mu J}\left\{ \rho\, \frac{P^2}{\pi} - \frac{1}{2}\, b\left[d\,(f_1^1 - f_1^2) + (2\rho - b)\, f_1^3 + m_1^1 + m_1^2 \right] \right\} \tag{14}$$

Ainsi nous aurons la valeur de $- \frac{F^1}{\mu J} + \frac{G^1}{EI^2}$ soit:

$$\frac{1}{EI^2 + \mu J} \left\{ \frac{1}{\pi} \left[(\rho - 1) P^2 - k P^1 \right] - b \left[d (f_1^1 - f_1^2) + (2\rho - b) f_1^3 + m_1^1 + m_1^2 \right] \right\} \tag{141}$$

En la portant dans les équations n°s 133 et 134 nous aurons 11 égalités pour déterminer les 9 valeurs inconnues d'indice 1 (A_1 B_1 C_1 D_1 f_1^1 f_1^2 f_1^3 m_1^1 et m_1^2) et les constantes K^2 et K_n^1 . Rappelons en effet que les coefficients a_1 b_1 a_1^* b_1^* et B^1 sont des fonctions linéaires de f_1^1 et f_1^2 .

Termes d'indice n -

$$A_n (a)^n + B_n (a)^{-n} + C_n (a)^{n+2} + D_n (a)^{-n+2} = o \tag{142}$$

$$n A_n (a)^{n-1} - n B_n (a)^{-n-1} + (n+2) C_n (a)^{n+1} + (-n+2) D_n (a)^{-n+1} = o \tag{143}$$

$$A_n (b)^n + B_n (b)^{-n} + C_n (b)^{n+2} + D_n (b)^{-n-2} = \frac{\rho}{(n)^2 - 1} \left\{ \frac{F_n}{\mu J} \left(\frac{\rho}{n} - e n \right) + \frac{G_n}{EI^2} b \right\} \tag{144}$$

$$n A_n (b)^{n-1} - n B_n (b)^{-n-1} + (n+2) C_n (b)^{n+1} + (-n+2) D_n (b)^{-n+1} = \frac{\rho}{(n)^2 - 1} \left\{ \frac{n F_n}{\mu J} + \frac{G_n}{EI^2} \right\} \tag{145}$$

L'égalité des pivotements φ_y^2 donne une équation identique à l'égalité 144 ci-dessus

$$\frac{1}{E} \left\{ - a_n (b)^{n-1} n (1+\nu) + b_n (b)^{n+1} \left[-n + 2 - \nu (n+2) \right] + a_n^* (b)^{-n-1} n (1+\nu) + b_n^* (b)^{-n+1} \left[n + 2 + \nu (n-2) \right] \right\} = \frac{(\rho)^2}{EI^3} \cdot H_n \cdot \frac{1}{(n+1)(n-1)} \tag{146}$$

$$\frac{1}{E}\left\{a_n (b)^{n-1} n (1+\nu) + b_n (b)^{n+1} (n+4+\nu n) + a'_n (b)^{-n-1} n(1+\nu) + b'_n (b)^{-n+1} (n-4+\nu n)\right\} = -\frac{(\rho)^2}{EI^3} \cdot \frac{H_n}{n} \cdot \frac{1}{(n+1)(n-1)} \quad (147$$

Enfin, nous avons:

$$-K\left\{n(n-1)(1-\nu) A_n (b)^{n-2} + n(n+1)(1-\nu) B_n (b)^{-n-2} + (n+1)\left[n(1-\nu) + 2(1+\nu)\right] C_n (b)^n + (n-1)\left[n(1-\nu) - 2(1+\nu)\right] D_n (b)^{-n}\right\} = m_n^1 \quad (148$$

$$(1-\nu) K\left\{n(-n+1) A_n (b)^{n-2} + n(-n+1) B_n (b)^{-n-2} - n(-n+1) C_n (b)^n + n(n-1) D_n (b)^{-n}\right\} = -m_n^2 \quad (149$$

$$K\left\{-4n(n+1) C_n (b)^{n-1} - 4n(n-1) D_n (b)^{-n-1}\right\} = f_n^3 \quad (150$$

Ces 9 égalités, compte tenu de l'équation exprimant H_n (équation 57), des valeurs des coefficients a_n b_n a'_n b'_n (équations 116, 117, 118 et 120), déterminent les termes d'indice n.

...

TROISIEME PARTIE

APPLICATIONS

TROISIEME PARTIE

APPLICATIONS

I - ROUE MODELE REDUIT (à l'échelle 2/5)

A VOILE SEMI-CONIQUE

FRETTAGE - CALAGE

La figure 32 donne les cotes essentielles de cette roue.

Les essais extensométriques concernant le calage ont été faits avec des surfaces en contact fraîchement usinées, alors que les mesures concernant la pose du bandage ont été relevées lors d'un second frettage.

L'axe et l'alésage du moyeu sont parfaitement cylindriques et admettent respectivement comme diamètre 85,60 mm et 85,48 mm.

La surface extérieure de la jante avant frettage est parfaitement cylindrique et admet comme diamètre $\emptyset$ = 379,80 mm.

Par contre, le bandage présente une face interne légèrement conique. La figure 33 en donne les caractéristiques dimensionnelles suivant trois diamètres à 120° dans deux plans perpendiculaires à l'axe de la roue, l'un contre le talon, l'autre à 8 mm de la face latérale opposée (1).

....

(1)- Le frettage communément adopté pour le matériel ferroviaire est de: S = 1,3/1000: le diamètre intérieur du bandage est 1,3/1000 plus petit que le diamètre extérieur de la roue à fretter.
La roue expérimentée a été frettée à 0,65/1000 environ pour être assuré de ne dépasser la limite élastique en aucun point.

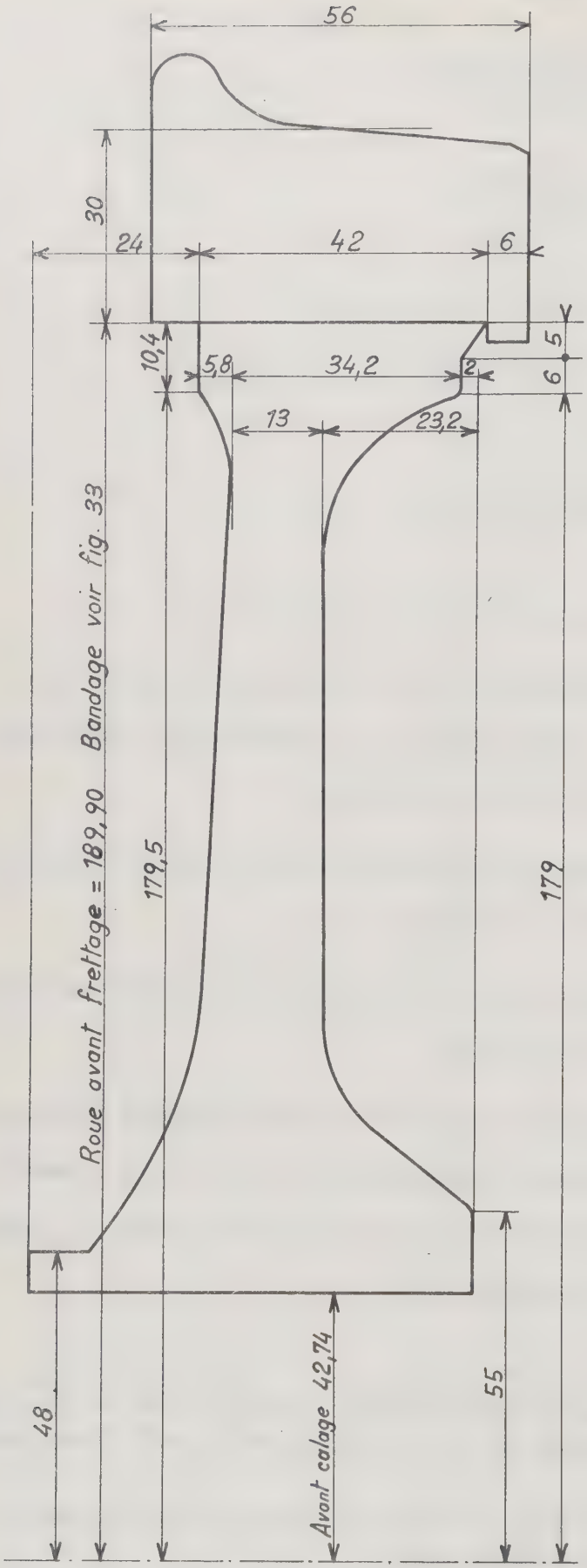
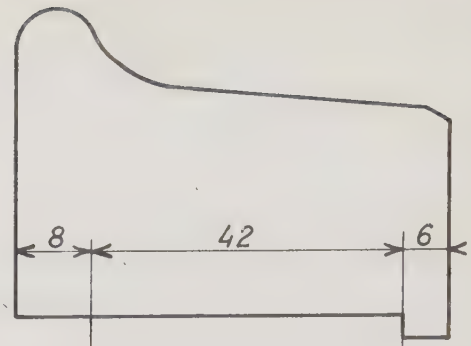


Fig. 32



Dans le plan 1 : Diamètre = 379,57 - 379,57 - 379,57 Plan 1

Dans le plan 2 : Diamètre = 379,51 - 379,52 - 379,52 Plan 2

Fig. 33

Le moyeu a été fictivement décomposé en six éléments, le voile et la jante en trois. Le bandage est assimilé à un cylindre creux admettant une méridienne rectangulaire de 56 mm x 33 mm. Les dimensions et la position de ces divers éléments sont consignées sur la figure 34.

Les courbes représentant les contraintes radiales et tangentielles en chaque point du voile, côté plan et côté conique, sont portées sur les graphiques:

- N° 1. - Contraintes radiales produites par le frettage du bandage sur la roue non calée sur un axe.
- N° 2. - Contraintes tangentielles produites par le frettage du bandage sur la roue non calée sur un axe.
- N° 3. - Contraintes radiales produites par le calage de la roue bandagée.
- N° 4. - Contraintes tangentielles produites par le calage de la roue bandagée.
- N° 5. - Contraintes radiales produites par le calage de la roue non bandagée.
- N° 6. - Contraintes tangentielles produites par le calage de la roue non bandagée.
- N° 7. - Contraintes radiales produites par le frettage du bandage sur la roue calée.
- N° 8. - Contraintes tangentielles produites par le frettage du bandage sur la roue calée.

Les résultats extensométriques figurent sur ces graphiques par des rectangles dont les côtés représentent les erreurs admises comme maximales, en abscisses sur la position de l'extensomètre, en ordonnées sur la valeur des contraintes obtenues par extensométrie.

....

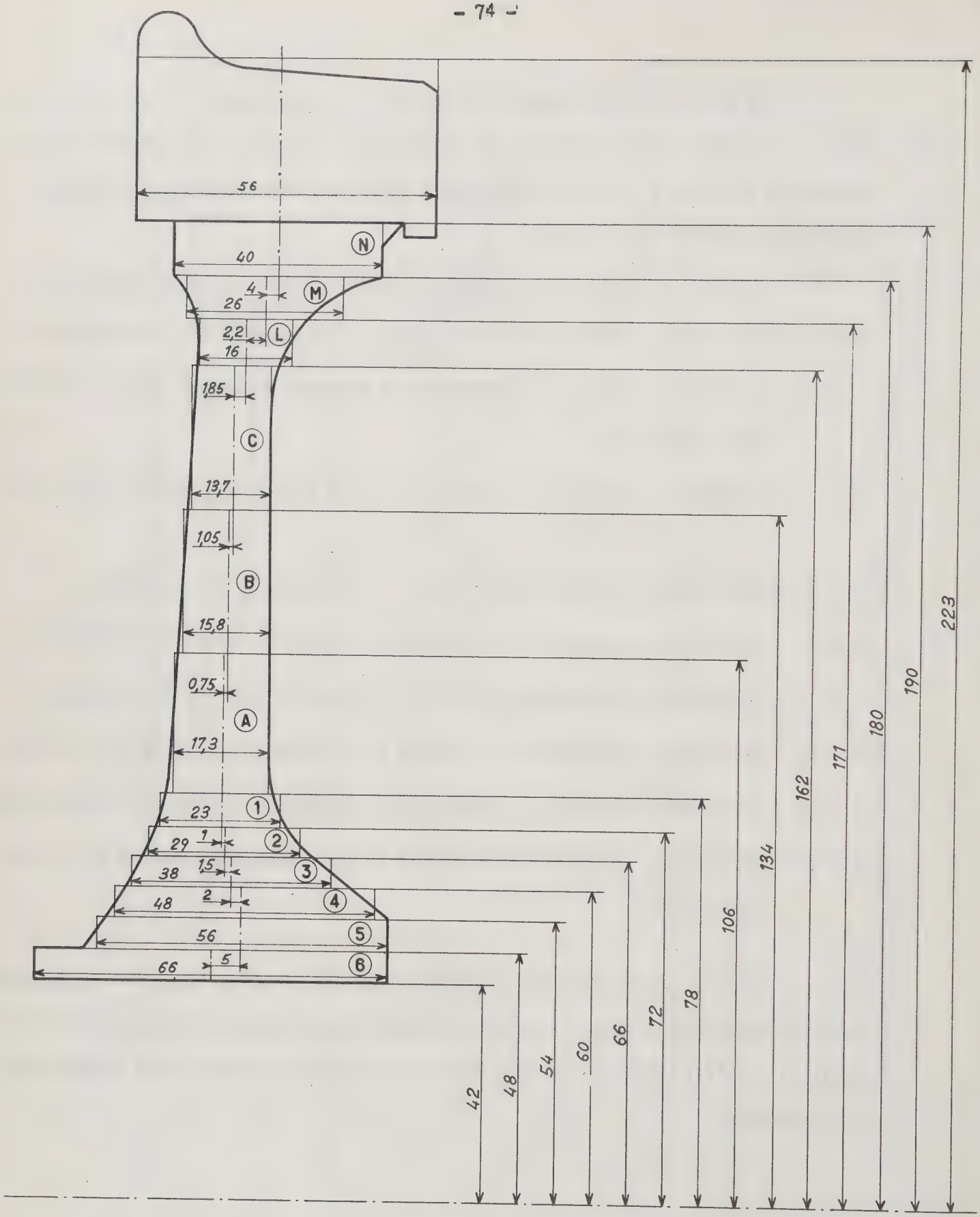

56
N
40
M
4
26
L
2,2
16
185
C
13,7
1,05
B
15,8
0,75
A
17,3
1
23
2
29
1
3
38
1,5
4
48
2
5
56
6
66
5
42
48
54
60
66
72
78
106
134
162
171
180
190
223

Fig. 34

Les valeurs trouvées par le calcul sont en concordance satisfaisante avec celles déterminées par les extensomètres, compte tenu de l'imprécision que l'on peut avoir sur la mesure des diamètres des surfaces mises en contact au frettage ou au calage (1).

Remarquons, en effet, qu'une erreur de 0,02 mm au diamètre sur le serrage, conduit à une erreur de l'ordre de 25 % sur les contraintes de calage et à une erreur de 8 % sur les contraintes de frettage.

De ce fait, si l'usinage des surfaces en contact est grossier, les contraintes obtenues seront plus faibles que celles escomptées, ce qui explique que les valeurs calculées lors d'un second calage ou frettage sont plus satisfaisantes.

D'autre part, cette étude met en évidence l'influence de la position du bandage par rapport à la jante (un décalage de 0,5 mm se traduit par une modification des contraintes de 7 % dans la partie du voile voisine de la jante), mais précise surtout l'importance primordiale du profil, en principe cylindrique, des surfaces de calage ou de frettage.

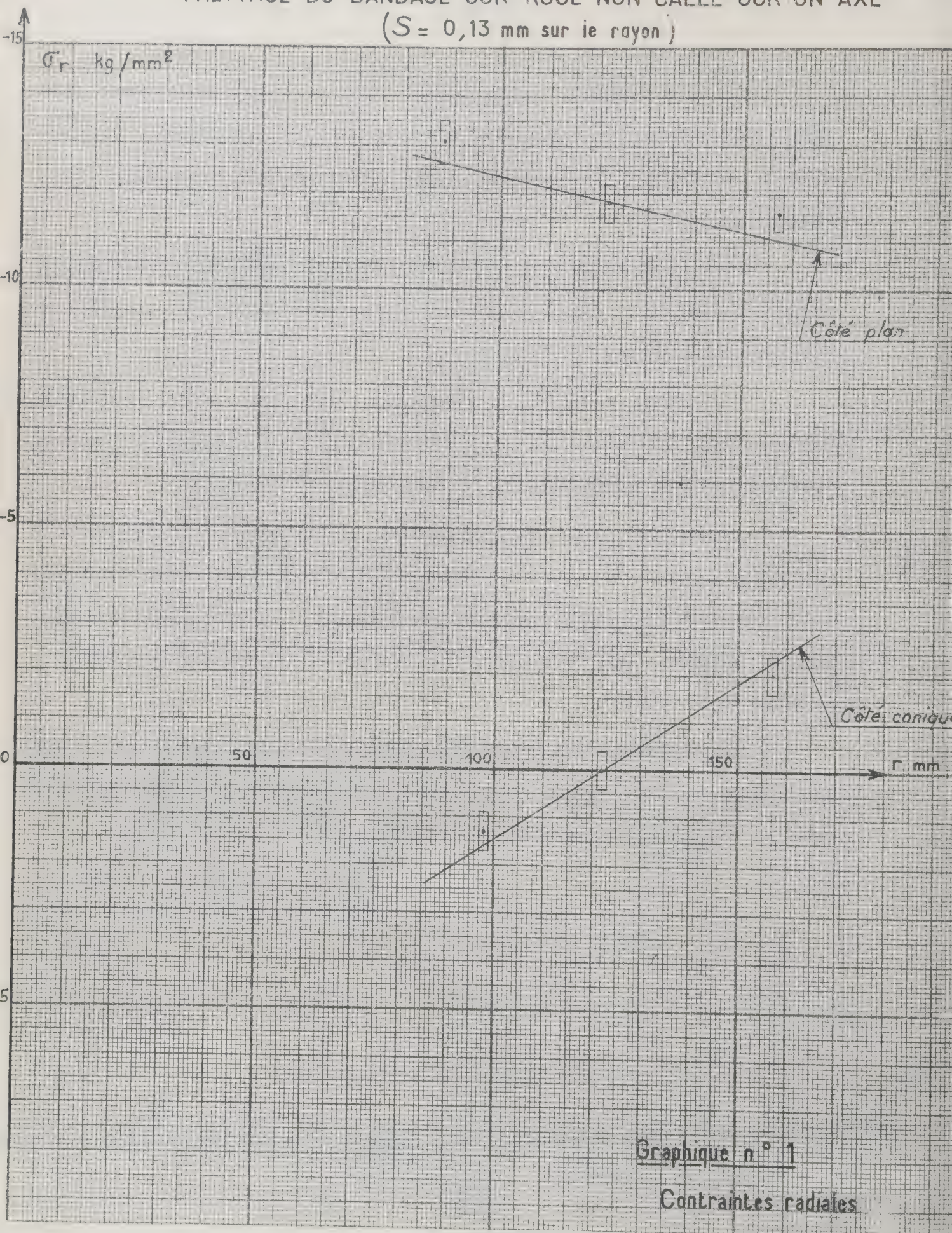
Dans l'exemple traité, la surface interne du bandage présente une obliquité de l'ordre de 6×10^{-4} radian qui provoque une augmentation des contraintes dans le voile qui atteint 30 % au voisinage de la jante.

..

(1)- Le calage produit un pivotement de la jante. Dans la roue non bandagée, ce pivotemer est de 6×10^{-4} radiant. Le calcul donne: $6,4 \times 10^{-4}$ radian .

FRETTAGE DU BANDAGE SUR ROUE NON CALÉE SUR UN AXE

(S = 0,13 mm sur le rayon)

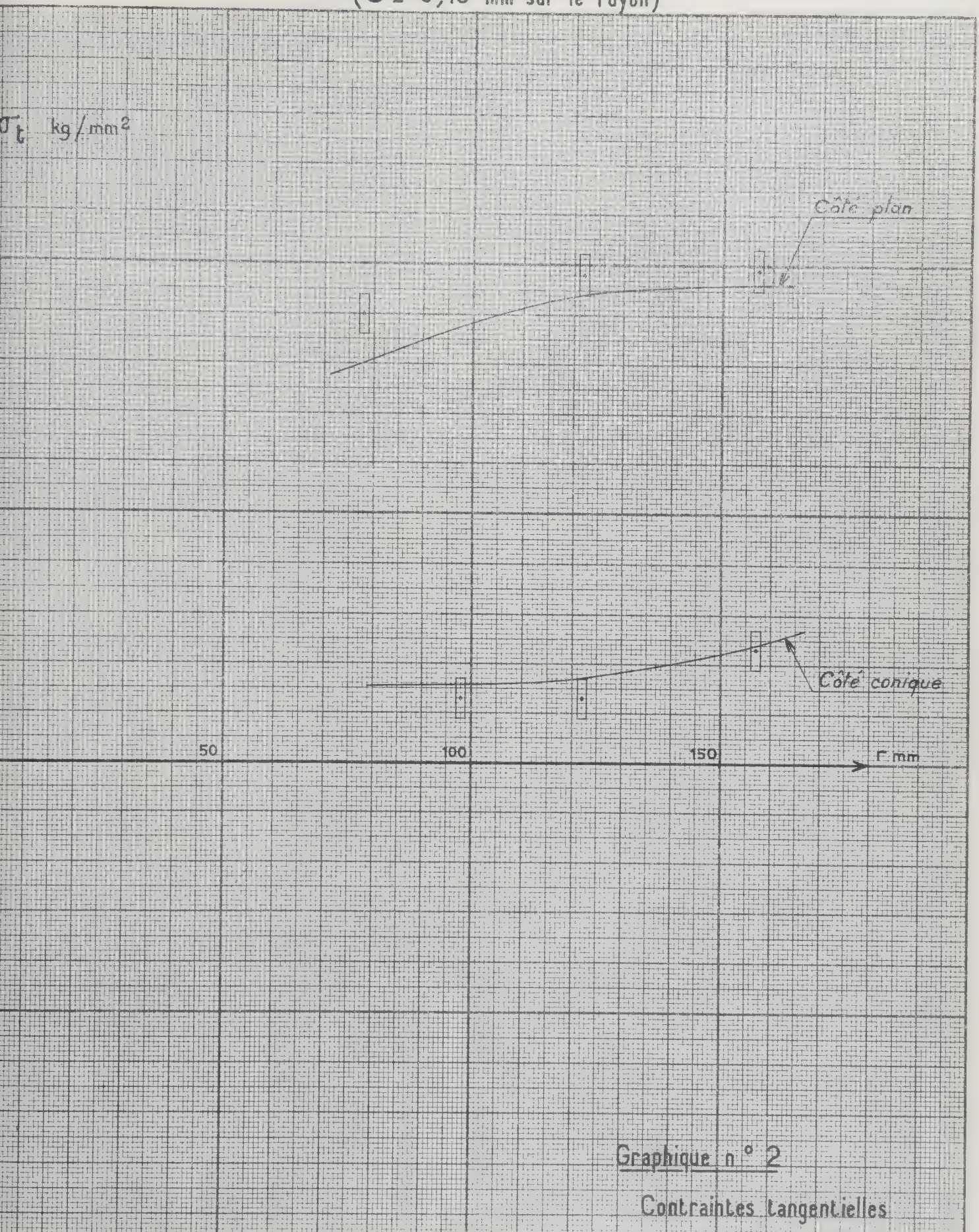


Graphique n° 1

Contraintes radiales

FRETTAGE DU BANDAGE SUR ROUE NON CALÉE SUR UN AXE

(S = 0,13 mm sur le rayon)

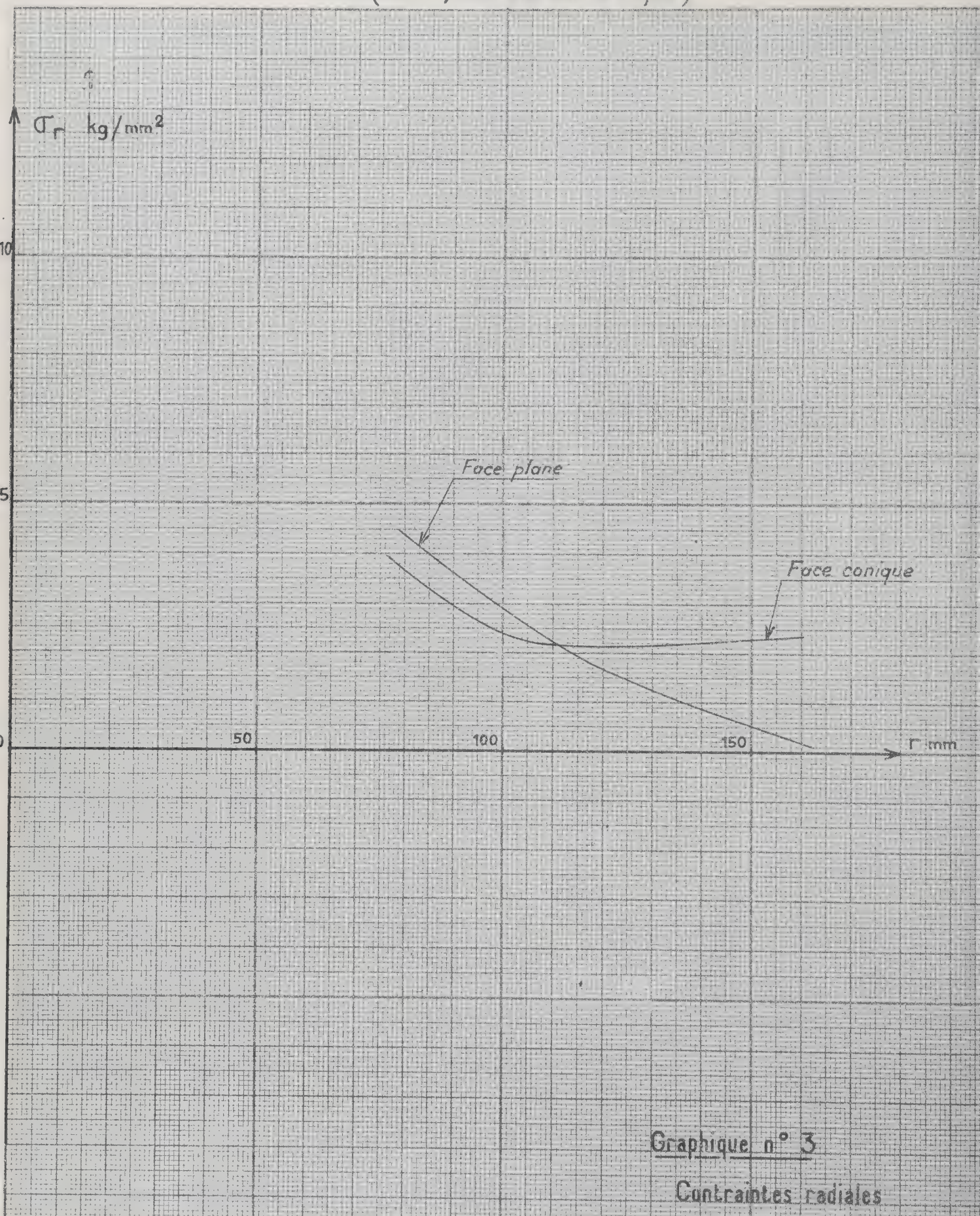


Graphique n° 2

Contraintes tangentielles

CALAGE DE LA ROUE BANDAGÉE SUR UN AXE D'ESSIEU

(S = 0,042 mm sur le rayon)

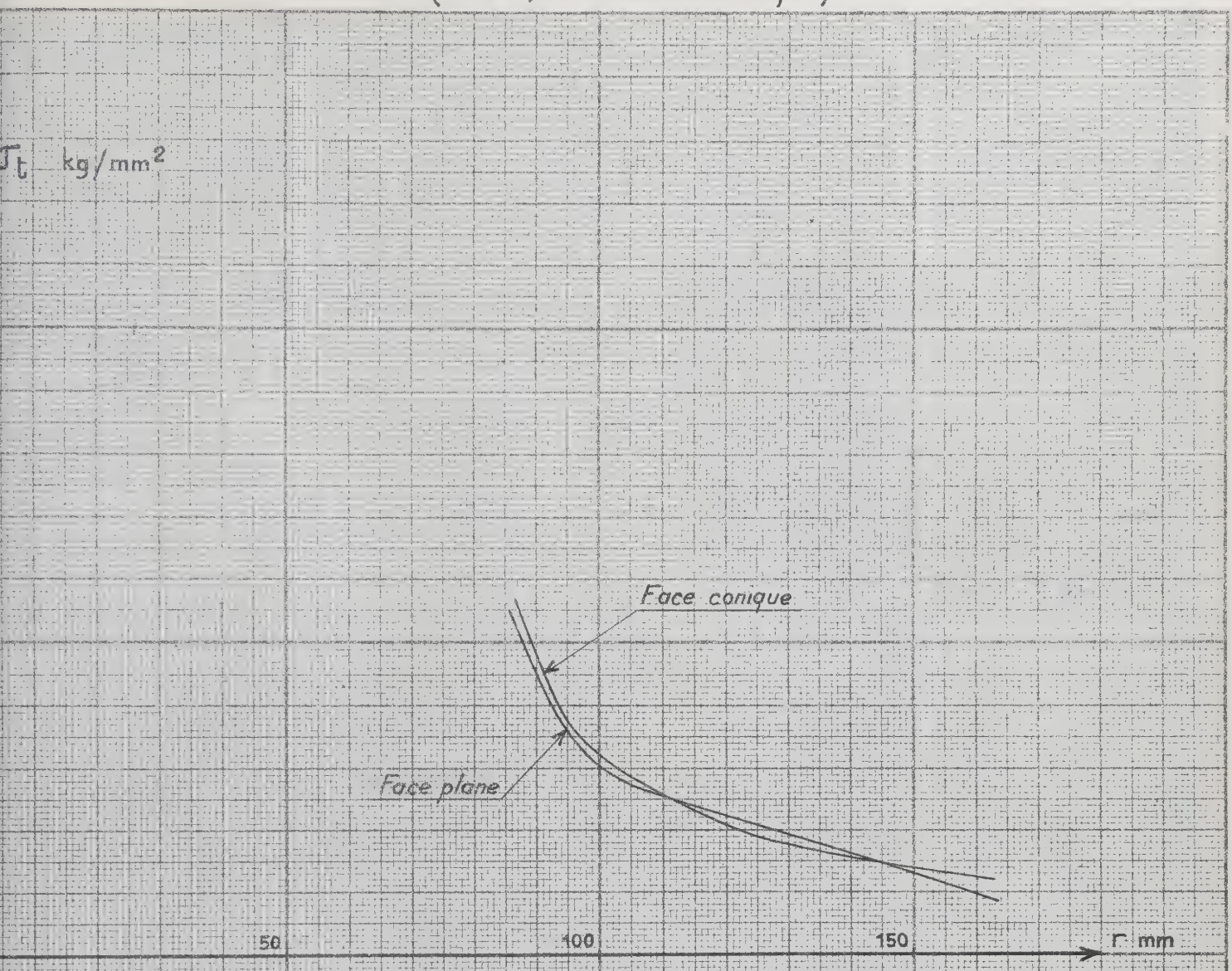


Graphique n° 3

Contraintes radiales

CALAGE DE LA ROUE BANDAGÉE SUR UN AXE D'ESSIEU

(S = 0,042 mm sur le rayon)

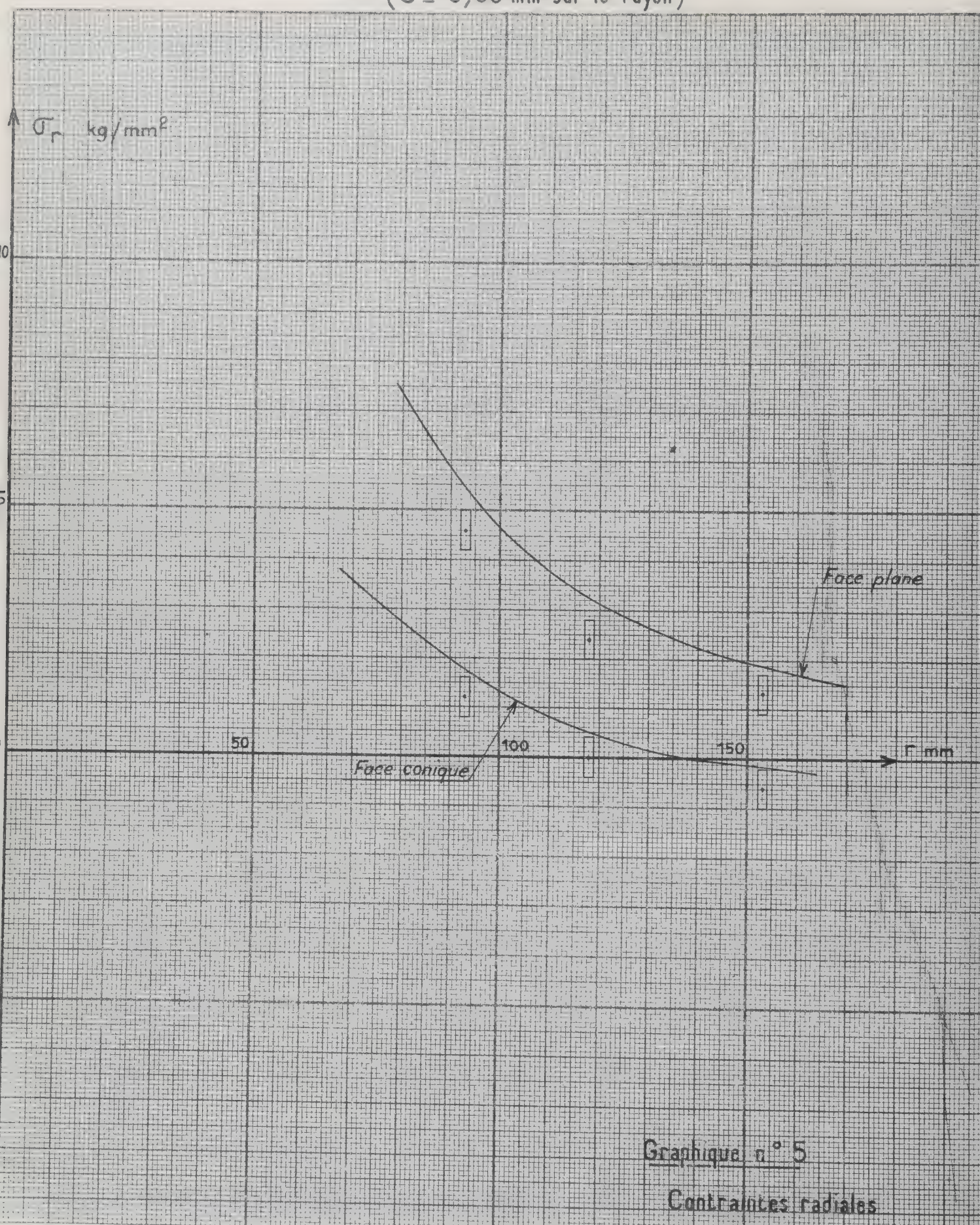


Graphique n° 4

Contraintes tangentielles

CALAGE DE LA ROUE NON BANDAGÉE SUR UN AXE D'ESSIEU

($S = 0,06$ mm sur le rayon)

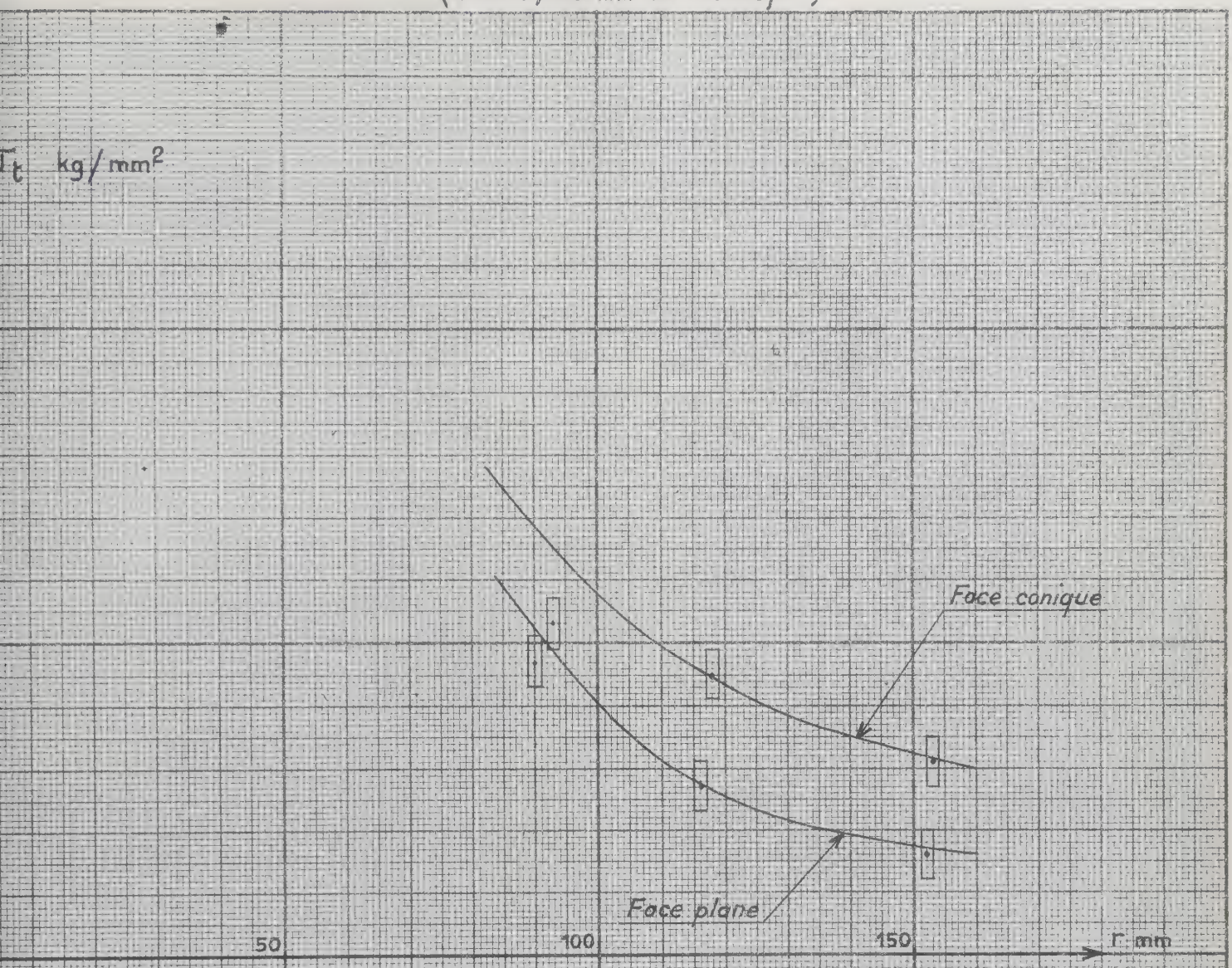


Graphique n° 5

Contraintes radiales

CALAGE DE LA ROUE NON BANDAGÉE SUR UN AXE D'ESSIEU

(S = 0,06 mm sur le rayon)

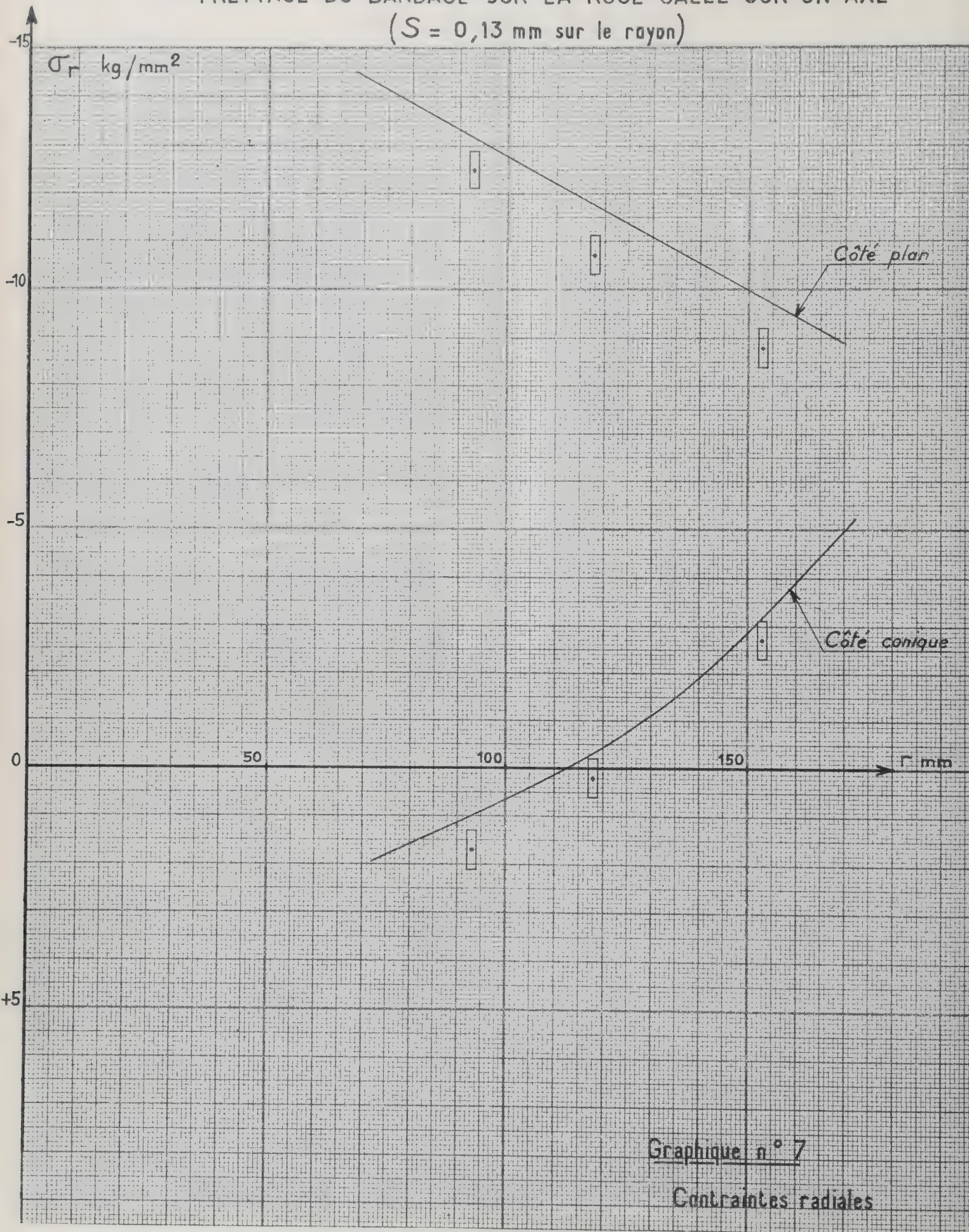


Graphique n° 6

Contraintes tangentielles

FRETTAGE DU BANDAGE SUR LA ROUE CALÉE SUR UN AXE

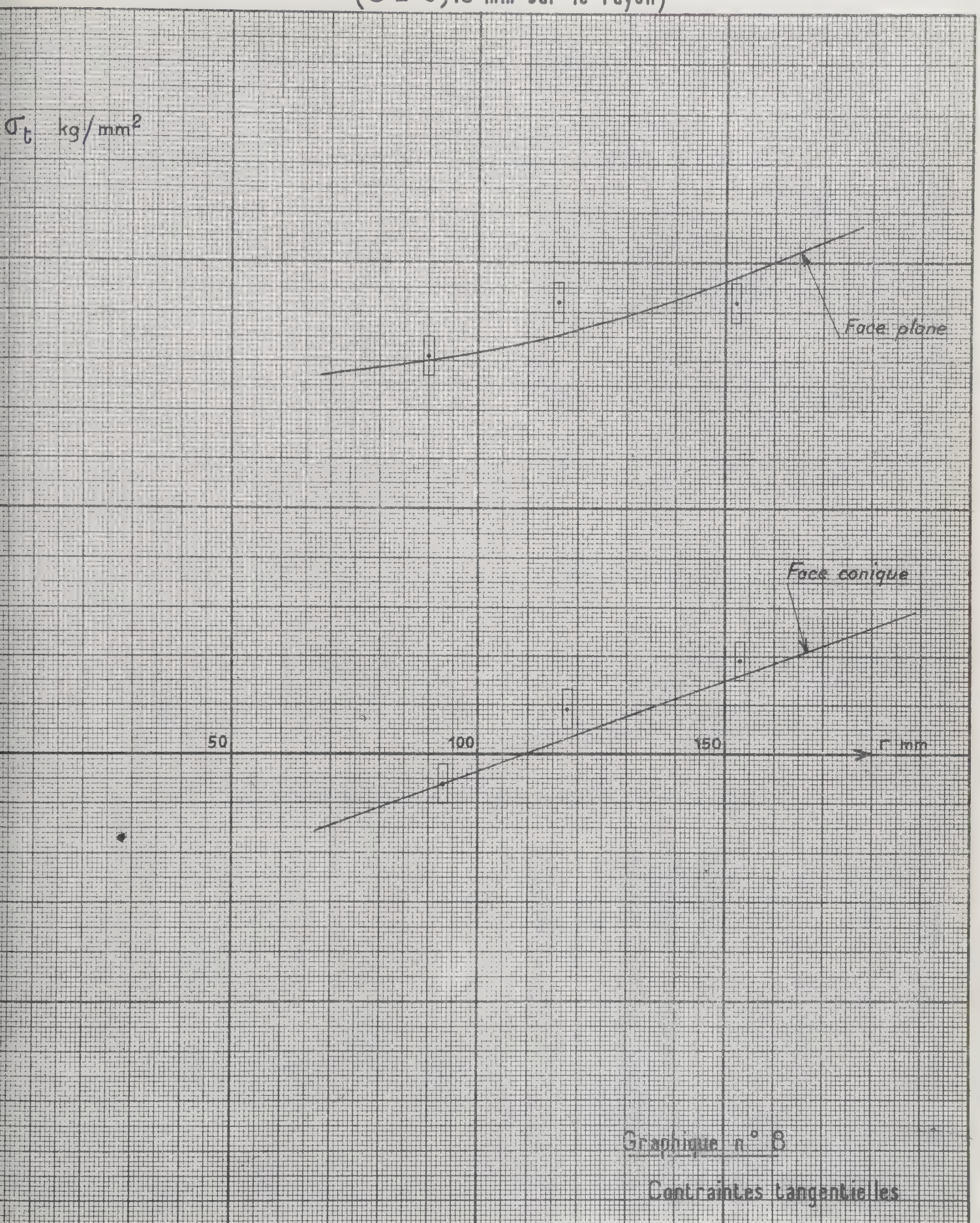
(S = 0,13 mm sur le rayon)



Graphique n° 7

Contraintes radiales

FRETTAGE DU BANDAGE SUR LA ROUE CALÉE SUR UN AXE
(S = 0,13 mm sur le rayon)



Graphique n° 8

Contraintes tangentielles

II - ROUE A VOILE CONIQUE

FRETTAGE

La figure n° 35 donne les cotes de la roue étudiée, ainsi que les dimensions des éléments unitaires que nous avons adoptés pour la décomposition de la jante et du moyeu.

Le voile, supposé encastré suivant le cylindre y = 210 mm, est considéré d'épaisseur constante h = 28 mm.

Le bandage a été fretté avec un serrage de 1,28 mm sur le diamètre (1,35/1000).

Les graphiques n°s 9, 10, 11 et 12 donnent les courbes des contraintes radiales et tangentielles sur chaque face de la roue.

Quatre extensomètres avaient été disposés à la base du congé de raccordement du voile avec le moyeu (y = 240 mm) pour mesurer sur chaque côté du voile les contraintes radiales (en 1 et 1') et tangentielles (en 2 et 2').

Les résultats expérimentaux et calculés ont été les suivants:

	Résultats		Erreur relative %
	Expérimentaux	Calculés	
Contrainte radiale en 1	- 35 kg/mm2	- 34,8 kg/mm2	0
-d°- en 1'	+ 17 kg/mm2	+ 15,6 kg/mm2	- 8
Contraintes tangentielles en 2	- 15 kg/mm2	- 17,4 kg/mm2	+ 16
-d°- en 2'	+ 7,5 kg/mm2	+ 5,8 kg/mm2	- 22

...

Les valeurs des contraintes obtenues par le calcul sont acceptables compte tenu:

- d'une part, des conditions expérimentales assez mal définies: roue de série, donc dimensionnée approximativement aux cotes prévues, frettée en atelier dans des conditions de serrage non absolument rigoureuses, positionsdes extensomètres non rigoureusement connues,

- d'autre part, à la schématisation de la roue que nous avons été amenés à faire pour pouvoir effectuer plus simplement les calculs.

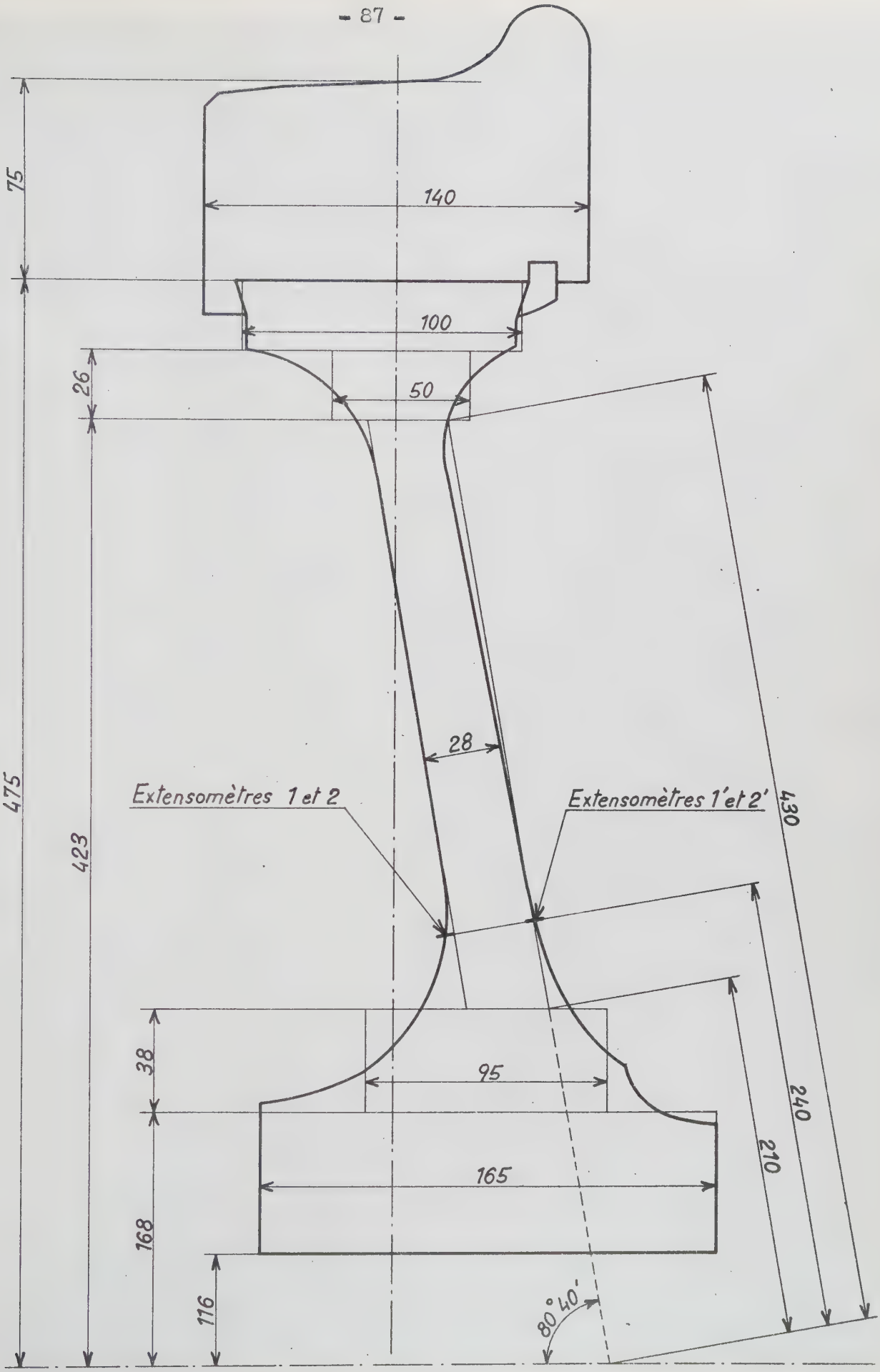
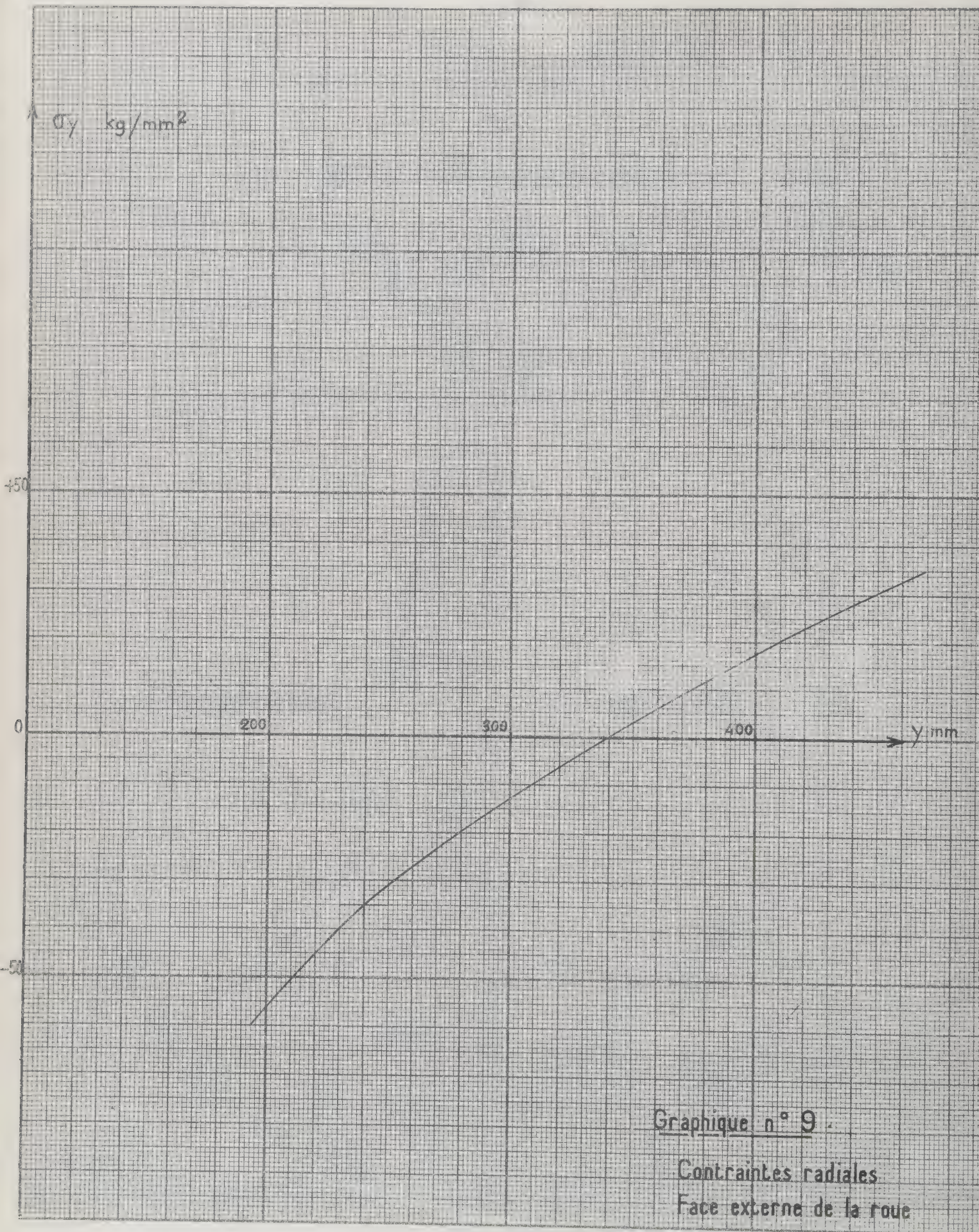
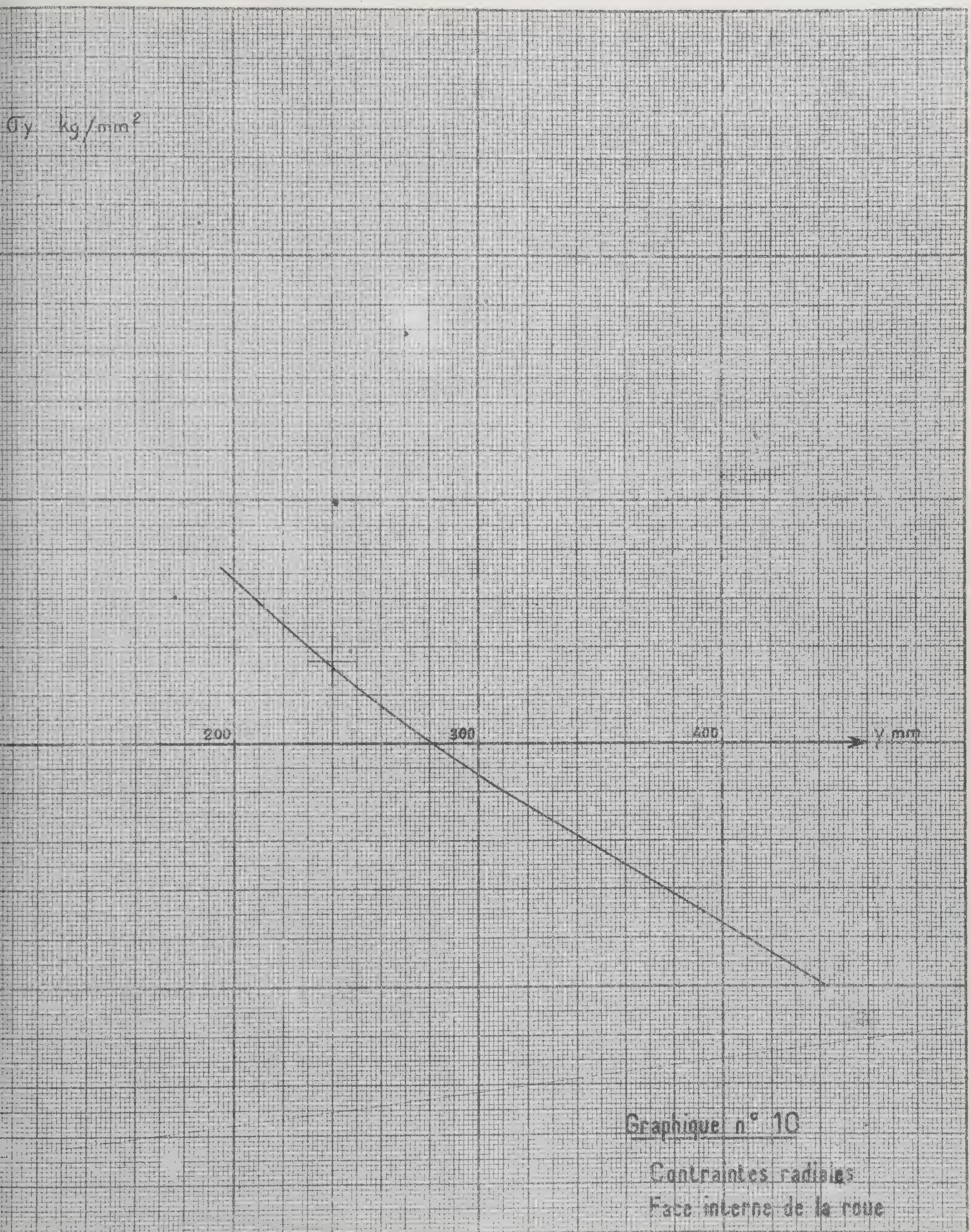

75
140
100
26
50
475
423
28
Extensomètres 1 et 2
Extensomètres 1' et 2'
430
38
95
240
210
165
168
116
80°40'

Fig. 35



Graphique n° 9

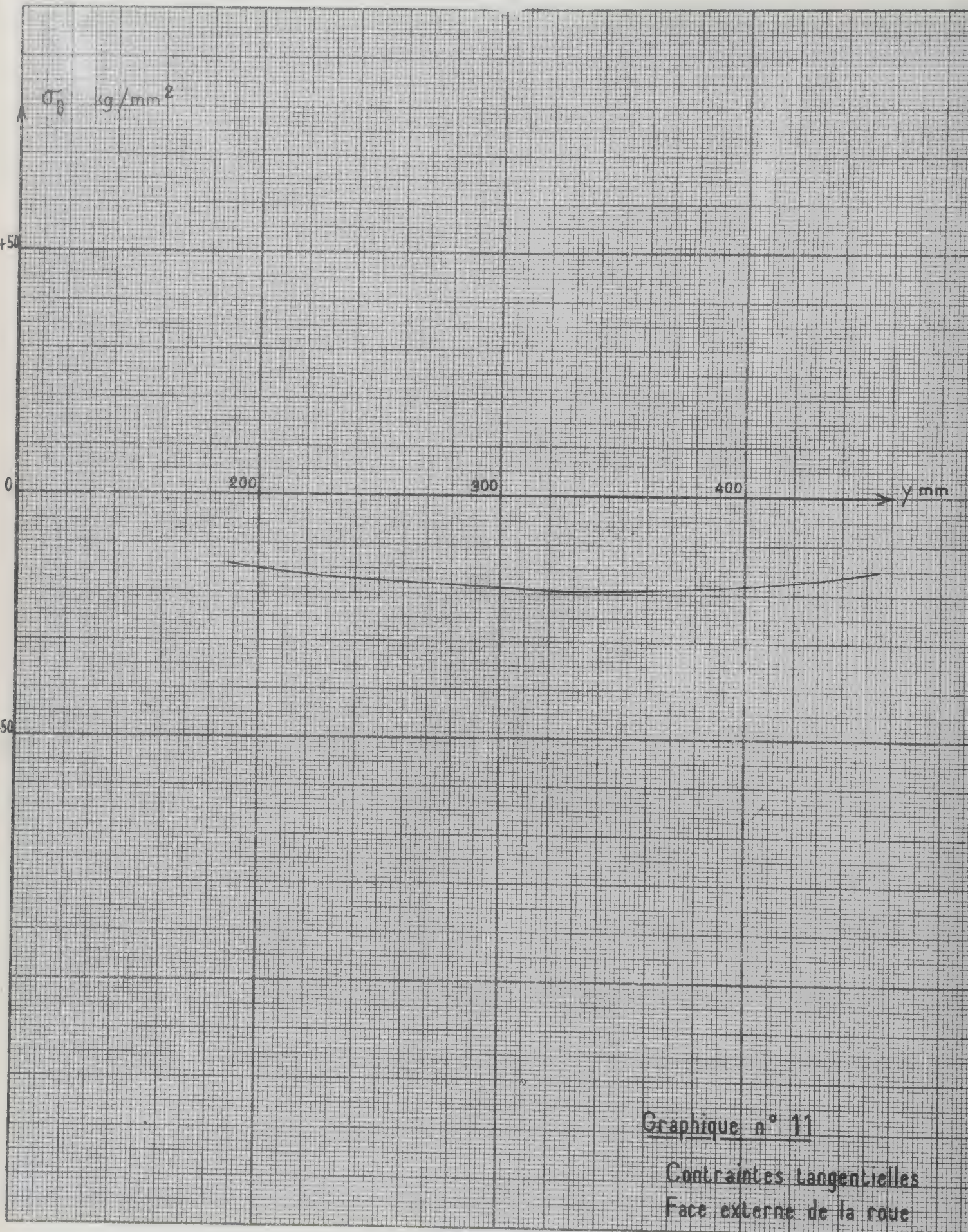
Contraintes radiales
Face externe de la roue



Graphique n° 10

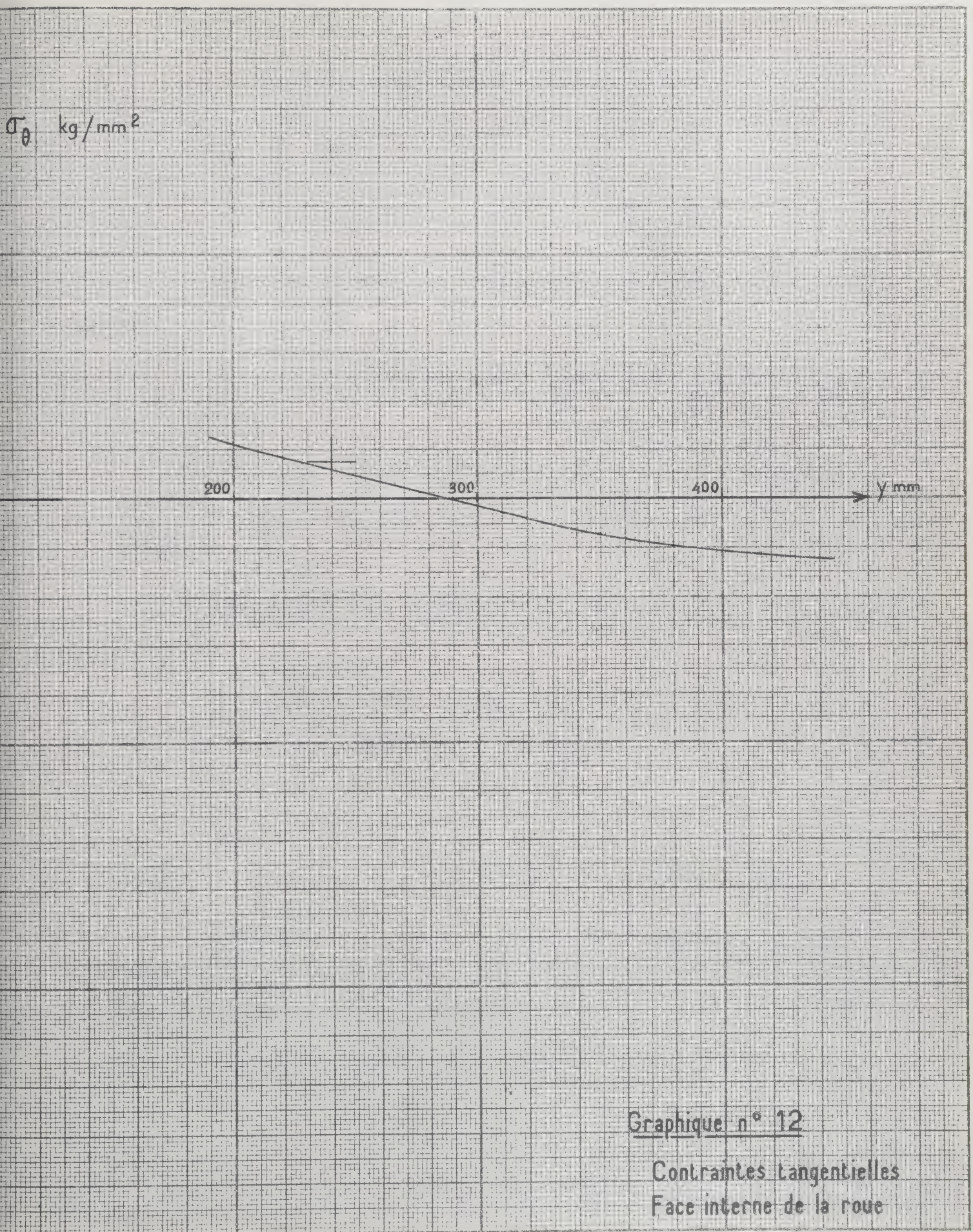
Contraintes radiales

Face interne de la roue



Graphique n° 11

Contraintes tangentielles
Face externe de la roue



Graphique n° 12

Contraintes tangentielles
Face interne de la roue

III - ROUE MODELE REDUIT A VOILE SEMI CONIQUE

EFFET D'UNE FORCE LOCALISEE APPLIQUEE SUR LE BANDAGE

L'étude se rapporte à la roue qui a déjà été étudiée dans l'application I (frettage et calage).

La figure n° 36 donne les cotes nécessaires aux calculs et la position des forces appliquées.

Le voile est supposé encastré dans le moyeu suivant la surface cylindrique de rayon = 75 mm et nous l'avons limité extérieurement par la surface cylindrique de rayon r = 170 mm.

D'autre part, nous avons admis que le voile avait une épaisseur constante de 15,5 mm.

La rigidité de torsion de l'anneau (μ J) a été calculée en assimilant d'abord, en première approximation, la section de l'anneau formé par la jante et le bandage à une section carrée de même surface.

La rigidité de flexion EI^2 a été calculée en considérant la normale principale à la ligne moyenne de l'anneau bandage-jante comme axe d'inertie.

La comparaison des résultats obtenus par le calcul avec ceux donnés par l'expérience montre que l'accord est très convenablement réalisé en prenant pour la somme de la rigidité à la torsion et de la rigidité à la flexion (μ J + EI^2) les 80 % de la valeur trouvée par les approximations indiquées ci-dessus.

...

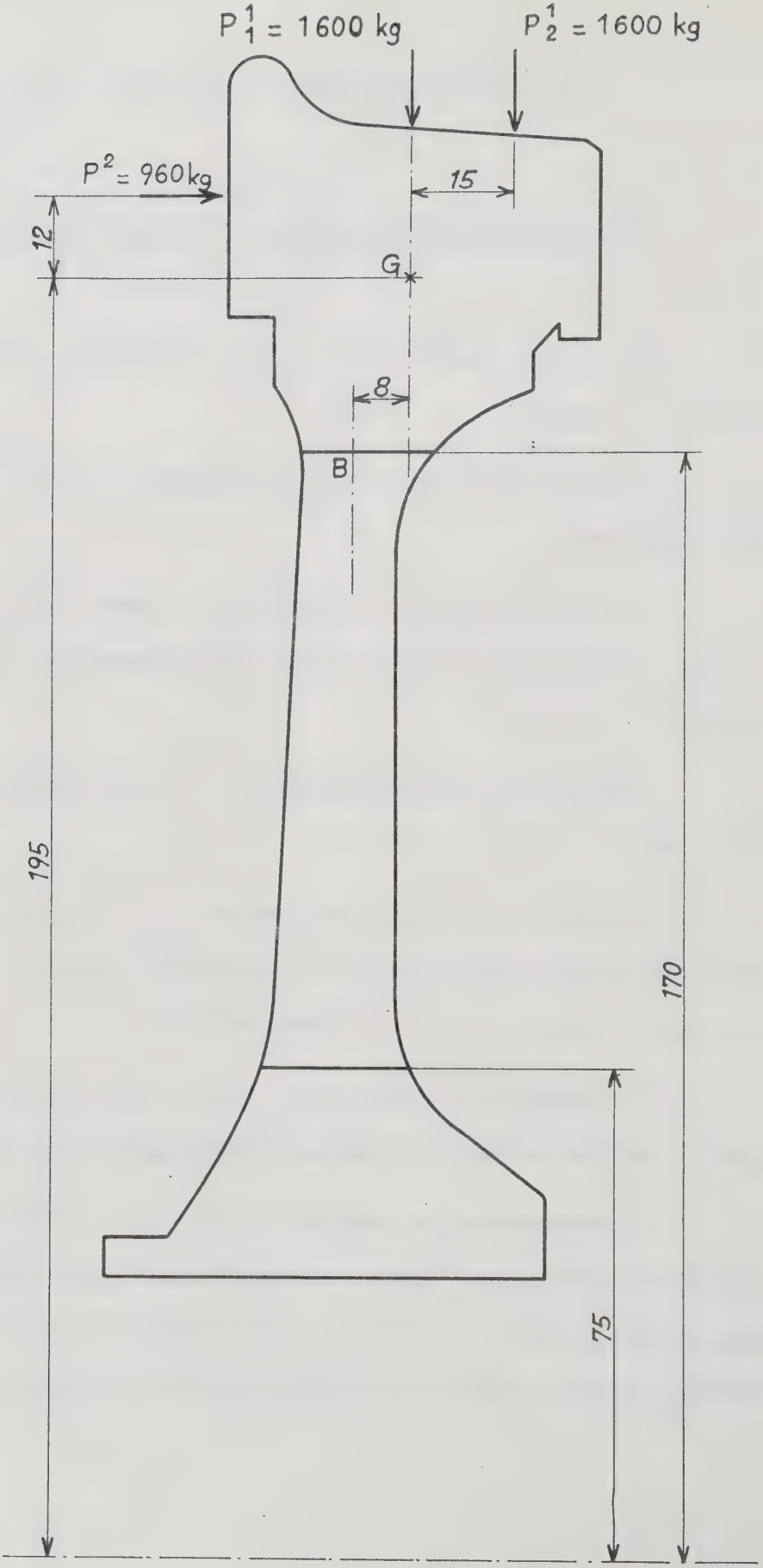


Fig. 36

En réalité, il conviendrait de calculer la rigidité de torsion et de flexion avec plus de précision.

a/- Application de la force P^2 de 960 kgf -

Les graphiques n°s 13 et 14 donnent les courbes des contraintes radiales et tangentielles sur chaque face du voile, ainsi que les résultats extensométriques.

Le fait d'avoir négligé le pivotement de la jante dans les expressions algébriques des déformations radiales a pour effet, dans le cas des forces latérales, de considérer que le voile est déformé uniquement par flexion, ce qui n'est pas rigoureusement exact et explique les légères différences qui subsistent entre les résultats expérimentaux et ceux calculés.

Remarque -

Nous avons étudié sur cet exemple l'influence de certaines données: épaisseur du voile, coefficient de rigidité et d'inertie de l'ensemble bandage-jante.

1°- Epaisseur du voile -

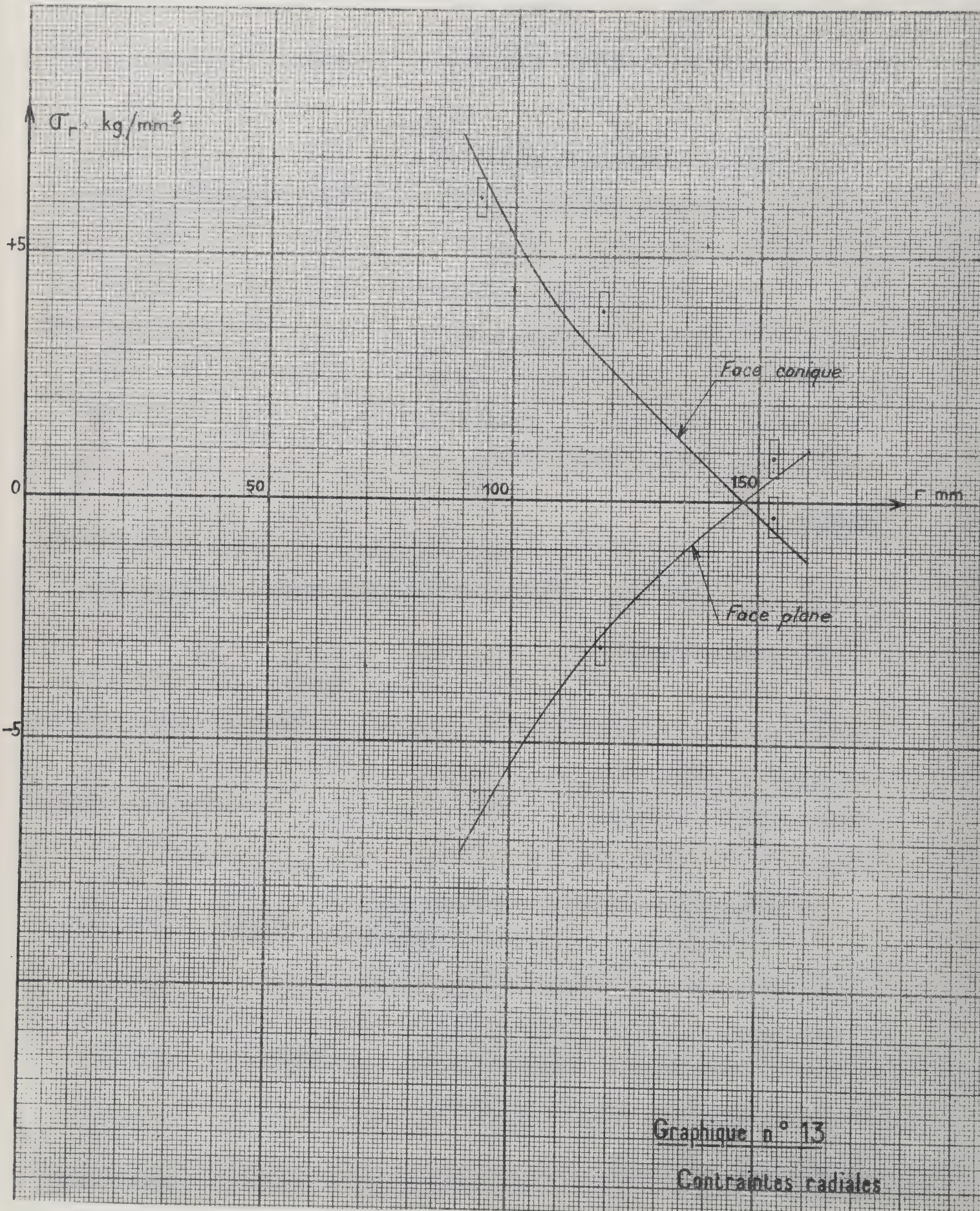
L'épaisseur du voile varie de 17,3 mm au raccordement avec le moyeu à 13,7 mm dans sa partie la plus mince à proximité de la jante. Nous avons donc refait les calculs en prenant comme épaisseur constante du voile 17,3 mm et 13,7 mm pour constater que nous obtenions des résultats voisins, mais moins satisfaisants que ceux obtenus avec l'épaisseur moyenne de 15,5 mm.

2°- Coefficient de rigidité et d'inertie de l'ensemble bandage-jante -

Si nous prenons comme rigidité de torsion (μJ) celle du carré admettant la surface de la section méridienne de l'anneau bandage-jante et comme inertie I^2 l'inertie de la section méridienne par rapport à la normale principale à la ligne moyenne, les courbes des contraintes radiales et tangentielles sont sensiblement celles que nous avons obtenues précédemment, mais décalées de façon importante (graphiques n°s 15 et 16).

....

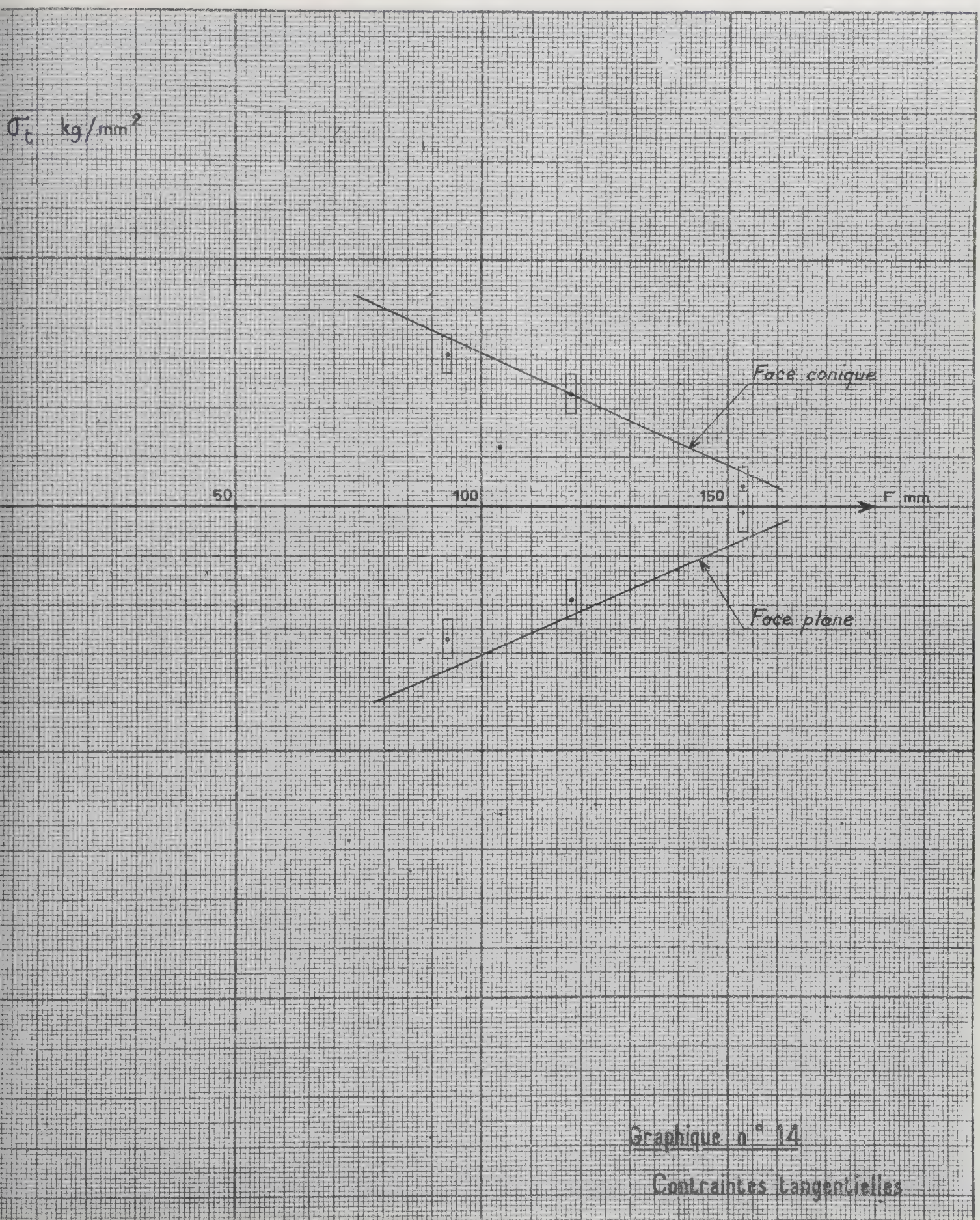
FORCE LATÉRALE P^2 DE 960 kg



Graphique n° 13

Contraintes radiales

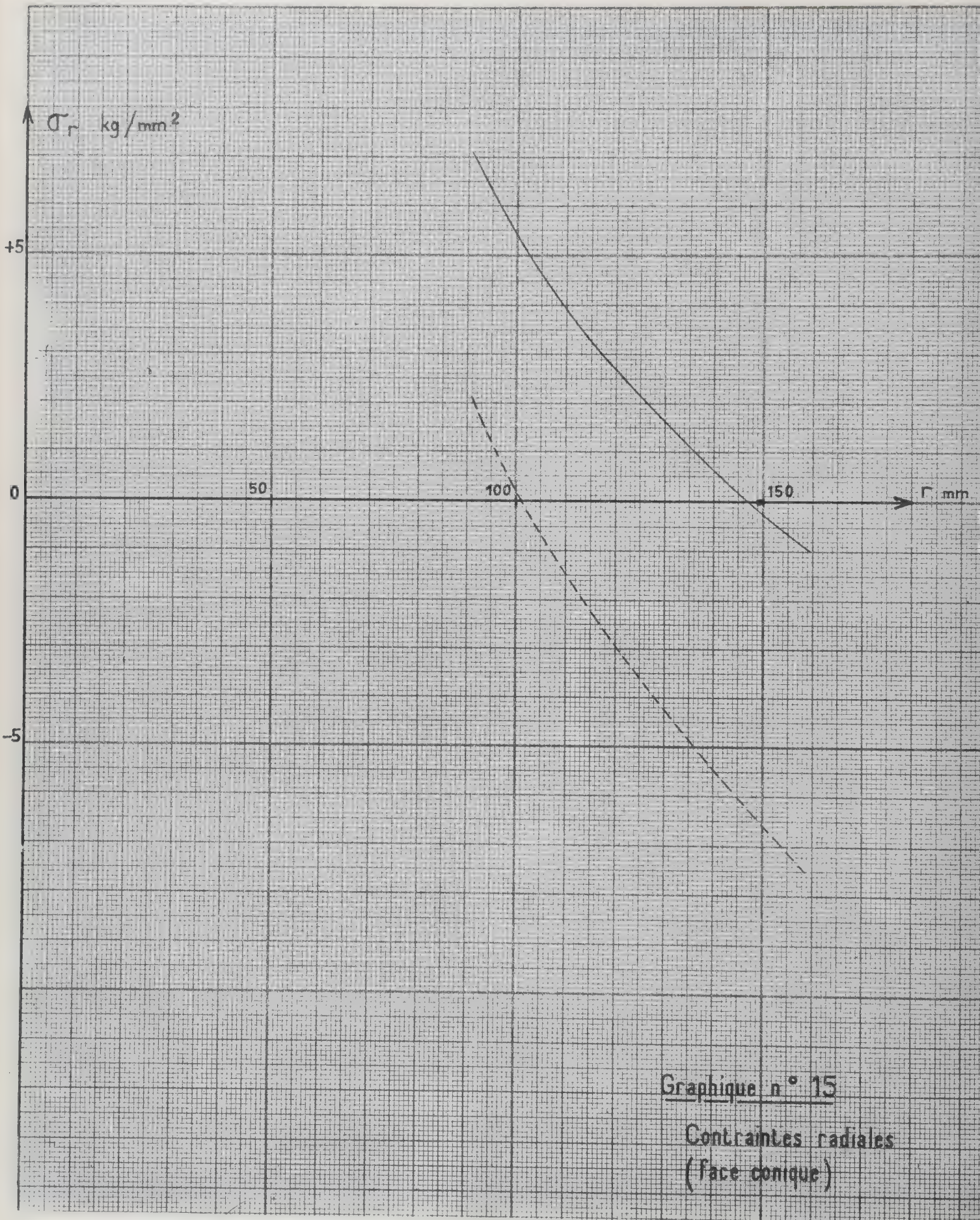
FORCE LATÉRALE P^2 DE 960 kg



Graphique n° 14

Contraintes tangentielles

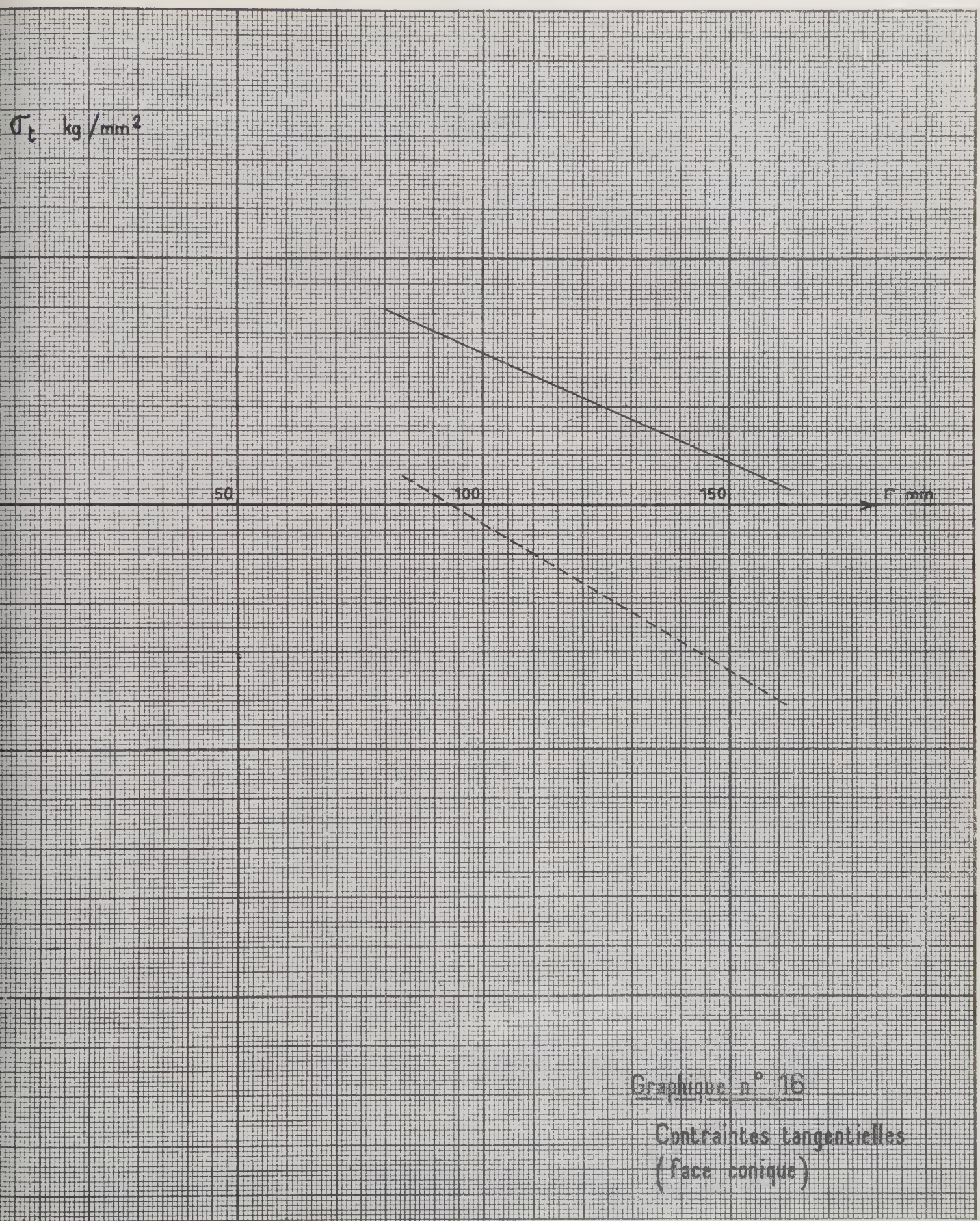
INFLUENCE DES COEFFICIENTS DE RIGIDITÉ ET D'INERTIE DE L'ANNEAU



Graphique n° 15

Contraintes radiales
(face conique)

INFLUENCE DES COEFFICIENTS DE RIGIDITÉ ET D'INERTIE DE L'ANNEAU



Graphique n° 16

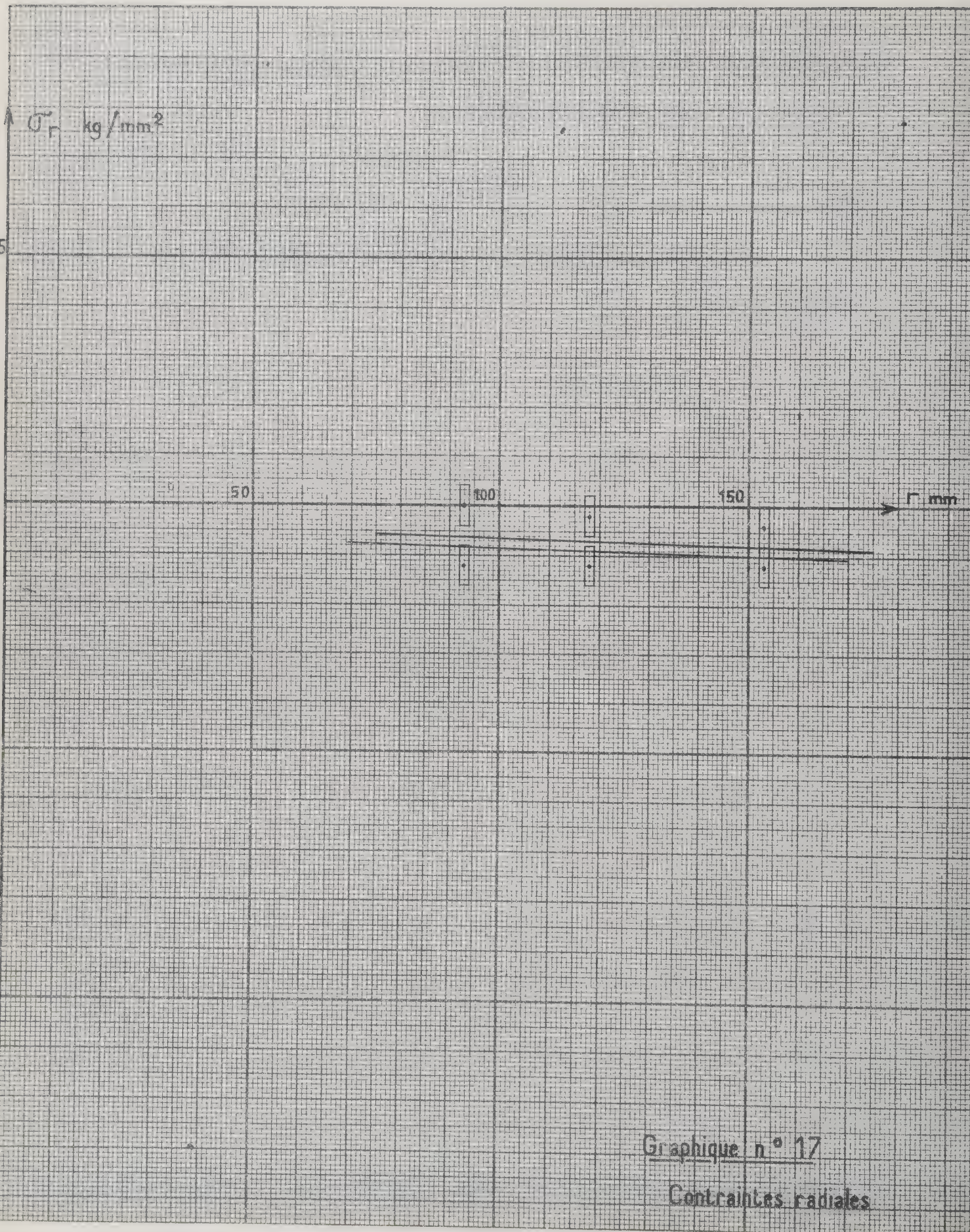
Contraintes tangentielles
(face conique)

b/- Application d'une force radiale P_1^1 dans l'axe du bandage, puis d'une force P_2^1 décalée de 15 mm par rapport à cet axe -

Les graphiques n°s 17, 18, 19 et 20 donnent les courbes des contraintes obtenues par le calcul et les résultats extensométriques.

Les valeurs calculées sont en correspondance satisfaisante avec les chiffres expérimentaux.

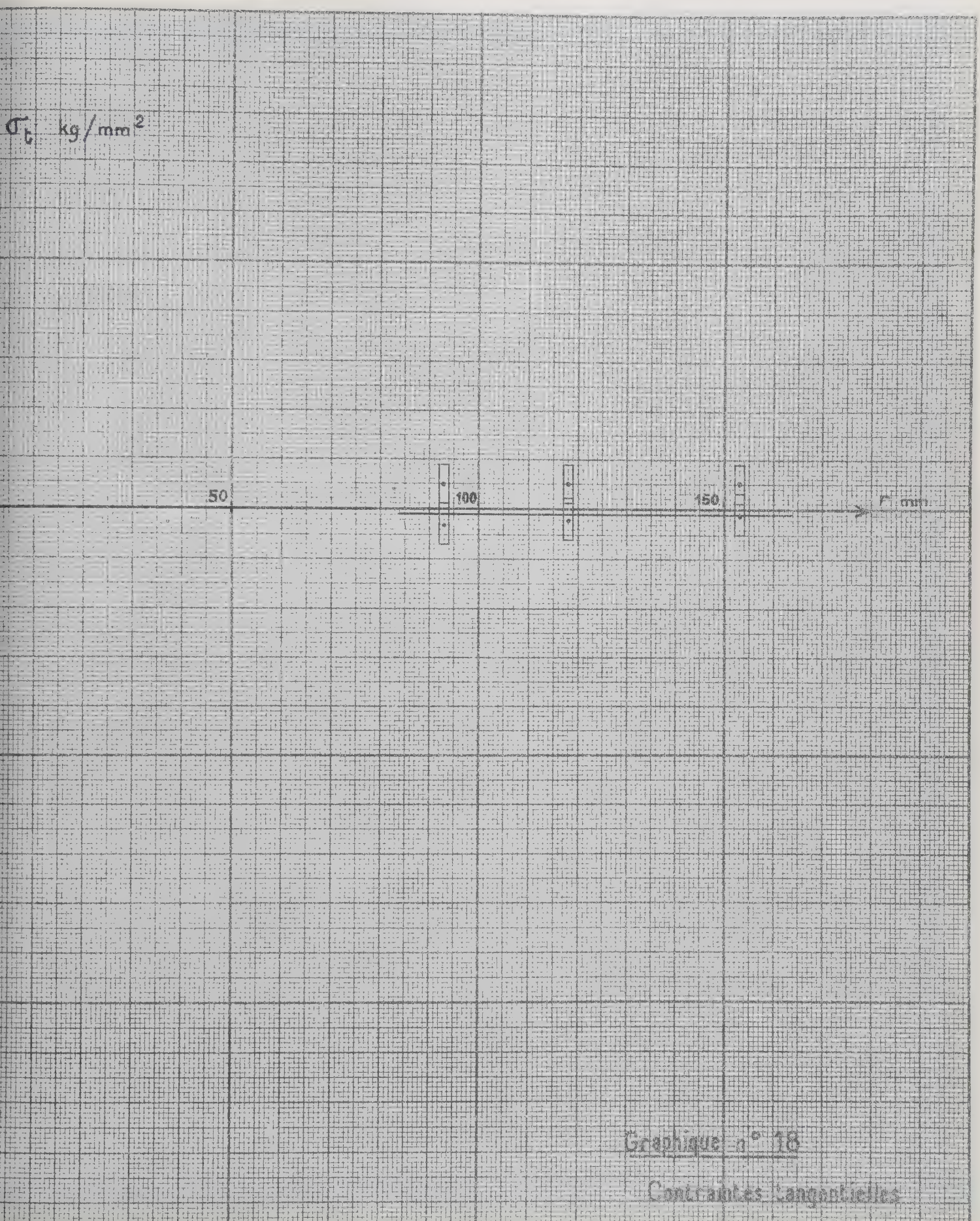
FORCE $P_1^1 = 1600$ kg



Graphique n° 17

Contraintes radiales

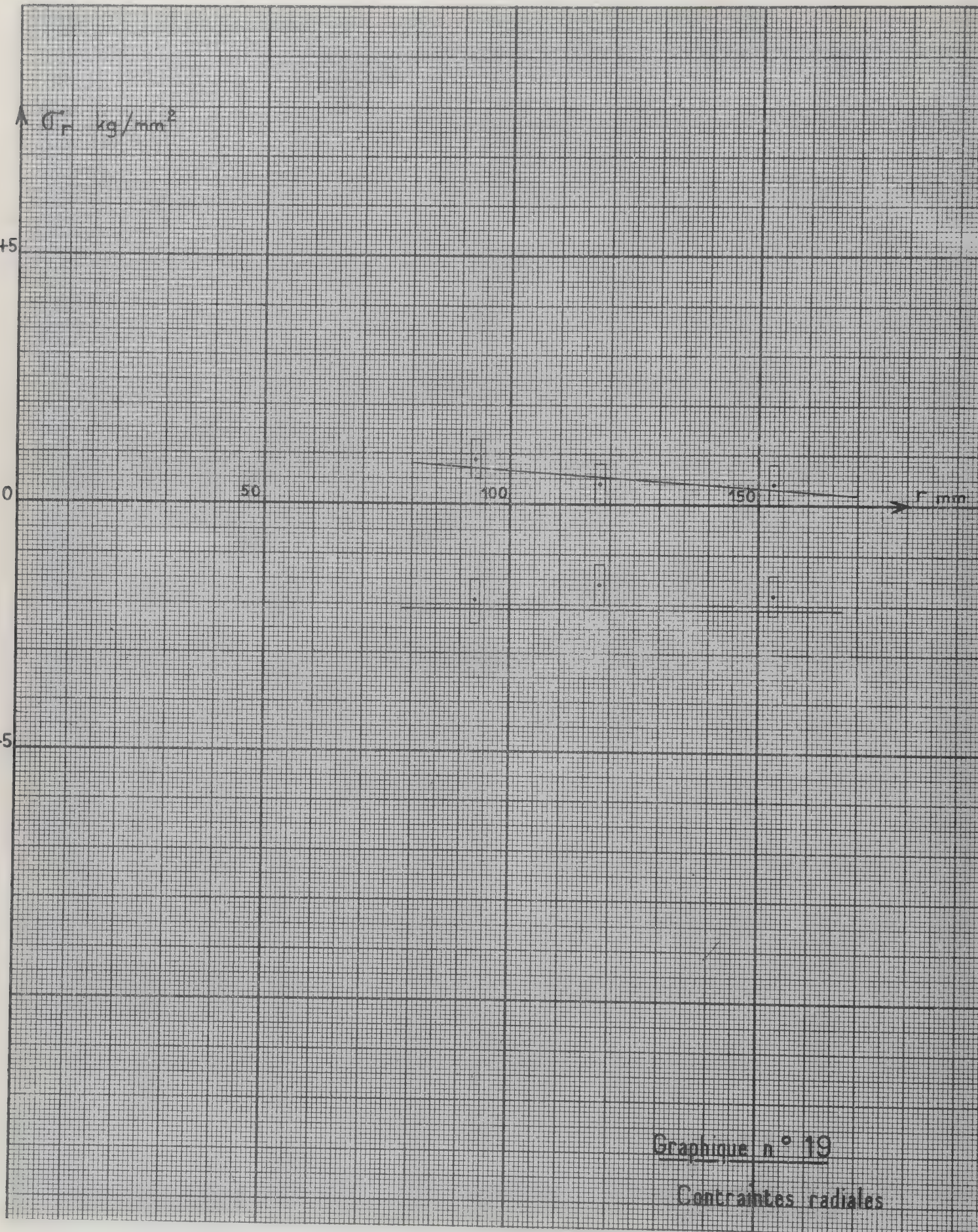
FORCE $P_1^1 = 1\,600$ kg



Graphique n° 18

Contraintes tangentielles

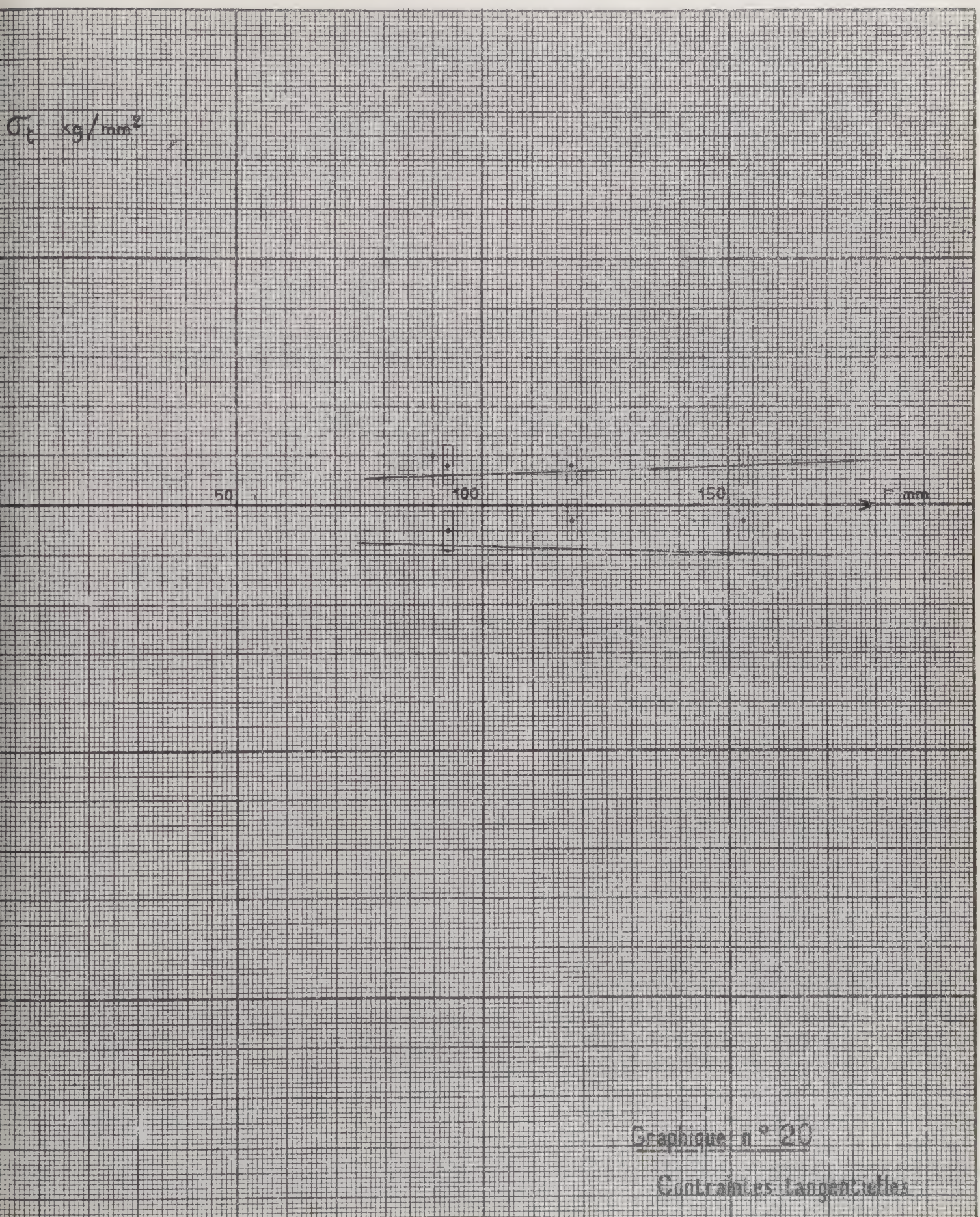
FORCE $P_2^1 = 1\,600$ kg



Graphique n° 19

Contraintes radiales

FORCE $P_2^1 = 1\,600$ kg



Graphique n° 20

Contraintes tangentielles

CONCLUSIONS GENERALES

CONCLUSIONS GENERALES

L'étude que nous avons faite conduit à une méthode générale permettant la mise en équations du problème concernant le calcul des contraintes dans les voiles de roues du matériel ferroviaire.

Ces contraintes sont dues:

- au frettage du bandage et au calage sur l'essieu (contraintes fixes)
- à l'action de la réaction oblique du rail (contraintes périodiques).

L'étude des contraintes fixes, traitée dans la première partie, a été effectuée entièrement pour les voiles plans, semi-coniques et coniques.

Celle des contraintes périodiques a été faite complètement dans la deuxième partie pour les voiles plans.

Dans la troisième partie, nous avons comparé les résultats obtenus par le calcul à ceux donnés par des extensomètres à fils résistants sur deux roues, l'une à voile semi-conique pour le frettage, le calage et les forces localisées, l'autre à voile conique pour le frettage.

Cette comparaison fait ressortir un accord très satisfaisant entre les valeurs calculées et celles obtenues expérimentalement.

Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction, l'un des avantages du calcul, par rapport aux méthodes expérimentales, est de permettre beaucoup plus facilement l'étude de l'influence de divers paramètres (forme géométrique d'un élément de roue, positionnement du bandage) sur la valeur des contraintes.

Divers exemples de cette influence ont été donnés dans le cours de la troisième partie.

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

"Etude de la structure formelle des systèmes dénombrables et application aux calculs sur machines arithmétiques"

Vu et approuvé :

Paris, le 24 Avril 1962

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Marc ZAMANSKY

Vu
et Permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie
de Paris

Jean ROCHE